

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 11



Ярославль 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 11

Ярославль
Издательский дом ЯГТУ
2016

УДК 51:378
ББК 22.1
М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. – Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. – 370 с.

ISBN 978-5-9914-0560-7

В сборнике представлены научные работы, посвященные актуальным вопросам математики, физики, методики преподавания различных дисциплин, математического моделирования различных технических и технологических процессов и систем, химии и химической технологии, экологии, а также вопросам анализа качества продукции, производимой на предприятиях пищевой промышленности Ярославской области.

УДК 51:378
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. В. Бородин, А.Н. Жаров, Д.О. Бытев, Ю.К. Оленикова (председатель), В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра автоматизированных систем управления Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Высшая математика и естественные науки" Ярославского филиала МИИТ.

ISBN 978-5-9914-0560-7

© Ярославский государственный
технический университет, 2016

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.925

В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

МАЛОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ

Исследована неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью. Получены условия ветвления малого устойчивого периодического решения. Используются свойства оператора монодромии. Результаты применены к уравнению Рэля с малым внешним возмущением.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, малое периодическое решение, параметр, устойчивость, оператор монодромии.

V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

SMALL PERIODIC SOLUTION OF SYSTEM WITH PARAMETER

The non-autonomous system of ordinary differential equations with smooth right part is investigated. Terms of branching of small stable periodic solutions are obtained. The properties of the monodromy operator are used. The results are applied to the Rayleigh equation with a small external perturbation.

Keywords: differential equations, small periodic solution, parameter, stability, operator of monodromy.

Задача о ветвлении малого периодического решения стала уже классической в локальной качественной теории дифференциальных уравнений. Однако, несмотря на большое количество результатов по этой тематике, остается недостаточно исследованным вопрос об устойчивости малого периодического решения, которому и посвящена данная работа.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu) + \alpha h(t), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$ – малые параметры, правая часть ω -периодическая интегрируемая по t , гладко зависит от фазовой переменной и от параметров, $f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$, $f'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nm}$.

Определение 1. Решение вида $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$, $x(0, a^*, \mu^*, \alpha) = a^*$, системы (1) будем называть *малым*, если существует параметризация $a^* = a(\alpha)$, $\mu^* = \mu(\alpha)$, $0 < \alpha < \Delta$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a^* = 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu^* = 0_m$. При этом пара $(a'(0), \mu'(0))$ задает направление ветвления.

Задача. Найти условия, при которых система (1) имеет малое устойчивое ω -периодическое решение.

Свойство устойчивости периодического решения неавтономной системы обычно определяется по Ляпунову. Однако идея примера из монографии [1, с. 21] приводит к определению свойства устойчивости по параметру, которое может наблюдаться как «практическая» устойчивость при исследовании конкретных моделей в случаях неустойчивости по Ляпунову. Результаты исследования устойчивости нулевого решения по параметру на основе комбинации методов усреднения и функций Ляпунова изложены в монографии [2]. В данной работе при решении поставленной задачи будем использовать схему исследования локальных свойств оператора монодромии, предложенную в работах [3, 4].

Учитывая гладкость правой части и локальную продолжаемость решений будем предполагать, что оператор монодромии системы (1) представлен в виде

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + \alpha b + p(a, \mu, \alpha) + \varphi(a, \mu, \alpha), \quad (2)$$

где $X = X(\omega)$, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$,

$$X(0) = E; \quad b = b(\omega), \quad b(t) = X(t) \int_0^\omega X^{-1}(\tau) h(\tau) d\tau; \quad \text{вектор-форма } p(a, \mu, \alpha),$$

обладающая свойством $p(\alpha a, \alpha \mu, \alpha) = \alpha^k p(a, \mu, 1)$, $k > 1$, выделена по формуле Тейлора как первое приближение выражения

$$X \int_0^\omega X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a + \alpha b(\tau), \mu) d\tau; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\varphi(\alpha a, \alpha \mu, \alpha)\| \equiv 0.$$

Теорема 1. Если система (1) имеет малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$, $a^* = \alpha(a_0 + \bar{a}(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, $\bar{a}(0) = 0_n$, $\bar{\mu}(0) = 0_m$, то направление (a_0, μ_0) его ветвления удовлетворяет условиям

$$[X - E]a_0 + b = 0_n, \quad p(a_0, \mu_0, 1) = 0_n. \quad (3)$$

Доказательство. Так как функции $a = a^*$ и $\mu = \mu^*$ при $0 < \alpha < \Delta$ ($\Delta > 0$ – некоторое число) удовлетворяют условию ω -периодичности решения системы (1)

$$\begin{aligned} g(a, \mu, \alpha) &= x(\omega, a, \mu, \alpha) - a = \\ &= [X - E]a + \alpha b + p(a, \mu, \alpha) + \varphi(a, \mu, \alpha) = 0_n, \end{aligned} \quad (4)$$

связывающему начальное значение a и внутренний параметр μ с внешним параметром α , то справедливо равенство $g(a^*, \mu^*, \alpha) = \alpha(c + \alpha^{-1}u(\alpha)) \equiv 0_n$, в котором $u(\alpha) = \alpha^k p(a_0 + \bar{a}(\alpha), \mu_0 + \bar{\mu}(\alpha), 1) + \varphi(a^*, \mu^*, \alpha) = O(\alpha^k)$. Если $c \neq 0$, то существует такое число $\Delta_1 \in (0, \Delta]$, что $\alpha(c + \alpha^{-1}u(\alpha)) \neq 0_n$. Это противоречит периодичности решения $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$ при $0 < \alpha < \Delta_1$. Аналогично нетрудно видеть, что $[X - E]\bar{\mu}(\alpha) \equiv 0_n$ при малых α .

Допустим, $p_0 = \|p(a_0, \mu_0, 1)\| \neq 0$, $\bar{p}(\bar{a}, \bar{\mu}) = p(a^*/\alpha, \mu^*/\alpha, 1) - p(a_0, \mu_0, 1)$. Выберем такое $\delta > 0$, что $\|\bar{p}(\bar{a}, \bar{\mu})\| < p_0/3$, $\alpha^{-k}\|\varphi(a^*, \mu^*, \alpha)\| < p_0/3$ при всех $\alpha < \delta$. Тогда $\|g(a^*, \mu^*, \alpha)\| \geq \alpha^k \left| p_0 - \|\bar{p}(\bar{a}, \bar{\mu})\| - \alpha^{-k}\|\varphi(a^*, \mu^*, \alpha)\| \right| > \alpha^k p_0/3$. Это противоречит условию $g(a^*, \mu^*, \alpha) \equiv 0_n$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим критический случай ветвления, когда $\det(X - E) = 0$. Допустим, K – фундаментальная $n \times r$ -матрица решений системы $[X - E]a = 0_n$, $z \in \mathbb{R}^r$ – произвольный вектор. $r = \dim(\ker[X - E])$.

Теорема 2. Если выполняется условие (3) и

$$n \leq r + m, \quad \text{rang } J = n, \quad (5)$$

$J = [p'_a(a_0, \mu_0, 1)K \quad p'_\mu(a_0, \mu_0, 1)]$, то система (1) имеет малое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$, $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha))$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|z(\alpha)\| = 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\bar{\mu}(\alpha)\| = 0$.

Доказательство. Подставим в условие (4) $a = a^* = \alpha(a_0 + Kz)$ и $\mu = \mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda)$. Так как $[X - E]a^* + \alpha b \equiv 0_n$, то силу условий (3) и (5) равенство (4) примет вид

$$g(a^*, \mu^*, \alpha) = \alpha^k (J \cdot \text{colon}(z, \lambda) + \tilde{p}(z, \lambda) + \alpha^{-k} \varphi(a^*, \mu^*, \alpha)) = 0_n, \quad (6)$$

$\tilde{p}(z, \lambda) = p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda, 1) - J \cdot \text{colon}(z, \lambda)$. По условию (5) матрица J имеет n линейно независимых столбцов. Составим из них $n \times n$ -матрицу B , а из остальных столбцов – $n \times (n - m - r)$ -матрицу B_1 . Тогда $J \cdot \text{colon}(z, \lambda) = Bv + B_1v_1$. Допустим, $v_1 = 0_{n-m-r}$. Функция $\psi(\alpha, v) = \alpha^{-k} \varphi(a^*, \mu^*, \alpha) + \tilde{p}(z, \lambda) - Bv$ определена при $\alpha > 0$, причем $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha, 0_n) = 0_n$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi'_v(\alpha, 0_n) = 0_{nn}$. Доопределим $\psi(\alpha, v)$ при $\alpha = 0$ по непрерывности и получим функцию $\bar{\psi}(\alpha, v)$: $\bar{\psi}(\alpha, v) = \psi(\alpha, v)$, если $\alpha > 0$, и $\bar{\psi}(0, 0_n) = 0_n$, $\bar{\psi}'_v(0, 0_n) = 0_{nn}$. Итак, условие (5) принимает вид

$$\bar{g}(\alpha, v) = Bv + \bar{\psi}(\alpha, v) = 0_n. \quad (7)$$

Так как $\bar{g}(0, 0_n) = 0_n$, $\bar{g}'_v(0, 0_n) = B$, $\det B \neq 0$, то по теореме о неявной функции существует такое $\Delta > 0$, что уравнение (7) определяет функцию $v = v(\alpha)$, $0 \leq \alpha < \Delta$, $v(0) = 0_n$, для которой $\bar{g}(\alpha, v(\alpha)) \equiv 0_n$. Зная $v = v(\alpha)$, с учетом того, что $v_1 = 0_{n-m-r}$, составим векторы $z = z(\alpha)$ и $\lambda = \lambda(\alpha)$, а затем и векторы $a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha))$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$, $0 < \alpha < \Delta$, удовлетворяющие условию (4). Итак, система (1) имеет малое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$. Теорема 2 доказана.

Предположим, условие (5) нарушается и $\text{rang } J = l \leq n$. Пусть $c = \text{colon}(z, \lambda)$, $D = [D_1 \ D_2]$ – фундаментальная матрица решений системы $Jc = 0_n$. При условии (3) в равенстве (6) выберем $c = Du$ или, что то же самое $z = D_1y_1$ и $\lambda = D_2y_2$. Разделив на α^k , получим уравнение

$$\hat{p}(y) + \hat{\varphi}(\alpha, y) = 0_n, \quad (8)$$

в котором $\hat{p}(y) = p(a_0 + KD_1y_1, \mu_0 + D_2y_2, 1)$, функция $\hat{\varphi}(\alpha, y) = \alpha^{-k} \varphi(a^*, \mu^*, \alpha)$ определена по непрерывности $\hat{\varphi}(0, y) \equiv 0_n$. Далее, применив к уравнению (8) теорему о неявной функции, как и в доказательстве теоремы 3, получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Если выполняется условие (3), $\text{rang } J = l \leq n$ и существует значение $y = y_0$, при котором $\hat{p}(y_0) = 0_n$ и $\text{rang } \hat{p}'(y_0) = n$, то система (1) имеет малое ω -периодическое решение.*

Всюду далее будем рассматривать критический случай устойчивости $\rho(X) = 1$. Установим структуру приращения $d(\alpha, u)$ оператора моно-

дромии (2) системы (1) в окрестности начального значения малого периодического решения.

$$\begin{aligned} d(\alpha, u) &= x(\omega, a^* + u, \mu^*, \alpha) - a^* = X(a^* + u) + \alpha b + p(a^* + u, \mu^*, \alpha) + \\ &+ \psi(a^* + u, \mu^*, \alpha) - (Xa^* + \alpha b + p(a^*, \mu^*, \alpha) + \psi(a^*, \mu^*, \alpha)) = \\ &= Xu + (p(a^* + u, \mu^*, \alpha) - p(a^*, \mu^*, \alpha)) - (\psi(a^* + u, \mu^*, \alpha) + \psi(a^*, \mu^*, \alpha)) = \\ &= Xu + \alpha^{k-1} P_1 u + \sum_{s=2}^k \alpha^{k-s} \bar{p}_s(u) + \tilde{\psi}(\alpha, u). \end{aligned}$$

Здесь $P_1 = p'_a(a_0, \mu_0, 1)$, $\bar{p}_s(u)$ – вектор-форма порядка s , $\tilde{\psi}(\alpha, u) = (p(a^* + u, \mu^*, \alpha) - p(a_0, \mu_0, \alpha)) + \psi(a^* + u, \mu^*, \alpha)$.

Теорема 4. Если выполняются условия теорем 1, 2 и для некоторого числа $b_1 > 0$ при всех малых $\gamma > 0$ справедлива оценка $\|X + \gamma P_1\| \leq 1 - \gamma b_1$, то малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Справедливость теоремы 4 следует из оценки $\rho(X + \gamma P) \leq \|X + \gamma P_1\|$ ($\rho(\cdot)$ – операция вычисления спектрального радиуса матрицы) и признака устойчивости периодического решения по линейному приближению [5]. То есть в условиях теоремы 3 имеет место не критический случай устойчивости по Ляпунову.

Определение 2. Малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$ является α -устойчивым (устойчивым по параметру), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$, для которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, и $0 < \alpha < \delta_2$ следует, что значение $x(q\omega, a^* + u, \mu^*, \alpha)$ определено при всех $q \in N$ и справедлива оценка $\|x(q\omega, a^* + u, \mu^*, \alpha) - a^*\| < \varepsilon$.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда $x = 0_n$ – решение системы (1). При $\mu = 0_m$ в окрестности нулевого решения оператор монодромии имеет вид

$$\begin{aligned} x(\omega, u, 0_m, 0) &= d(0, u) = Xu + p(u, 0_m, 0) + \varphi(u, 0_m, 0) = \\ &= [X + P_k(u) + \Phi(u)]u, \end{aligned} \tag{9}$$

где $P_k(u)$ – какая-либо $n \times n$ -матрица, для которой $P_k(u)u = p_k(u) = p(u, 0_m, 0)$, $P_k(\gamma u) = \gamma^k P_k(u)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma^{1-k} \|\Phi(\gamma u)\| = 0$.

Теорема 5. Если для некоторых чисел $c > 0$, $b > 0$ при всех малых $\gamma > 0$ и всех $\lambda: \|\lambda\| = c$ имеет место оценка

$$\|X + \gamma P_k(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b_k, \tag{10}$$

то при $\mu = 0_m$ и $\alpha = 0$ решение $x = 0_n$ системы (1) асимптотически устойчиво. Если при этом выполняются условия теорем 1 и 2, то малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$ является α -устойчивым.

Доказательство. Допустим в системе (1) $\mu = 0_m$, $\alpha = 0$. В силу леммы 9.2 из монографии [5] задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) сводится к задаче об асимптотической устойчивости нулевого решения системы в конечных разностях

$$u_{j+1} = [X + P_k(u_j) + \Phi(u_j)]u_j. \quad (11)$$

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma^{1-k} \|\Phi(\gamma u)\| = 0$, то существует такое $\delta_0 > 0$, что $\|\Phi(u)\| < b_k \|u\|^{k-1} / 2$ при всех $u : \|u\| < \delta_0$. Тогда из равенства (11) по условию (10) получим оценку

$$\|u_{j+1}\| < (1 - b_k \|u_j\|^{k-1} / 2) \|u_j\| < \|u_j\|. \quad (12)$$

Выберем тождественную последовательность функций $V_j(u) \equiv \|u\|$. Для этой любого члена этой последовательности и для любых аргументов по свойствам нормы выполняются условия: $a(\|u\|) = \|u\| / 2 \leq V_j(u) \leq b(\|u\|) = 2\|u\|$, $|V_j(u) - V_j(\tilde{u})| \leq \|u - \tilde{u}\|$. Кроме того, в силу оценки (12) при всех малых u справедливо неравенство $\|u_{j+1}\| - \|u_j\| < -b_k \|u_j\|^k / 2 < -c(\|u_{j+1}\|) = -b_k \|u_{j+1}\|^k / 2$. Так как $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ – функции класса Хана, то в силу предложения 2 из работы [6] нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво. Таким образом, первое утверждение теоремы 5 доказано.

Рассмотрим малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$. Приращение оператора монодромии представим в виде

$$d(\alpha, u) = [X + P_k(u) + G(\alpha, u) + V(\alpha, u)]u,$$

где $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{1-k} \|G(\alpha, \gamma u)\| \equiv 0$, $V(0, u) \equiv 0_{nm}$. Возьмем $u = \gamma \lambda$, $\|\lambda\| = c$. Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех $\gamma : \gamma < \delta_1 / c$ и $\alpha : \alpha < \delta_1$ выполнялось неравенство $\|G(\alpha, \gamma \lambda)\| \leq \gamma^{k-1} b_k / 4$. Существует $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, для которого в силу условия $\alpha < \delta_2$ при всех $\gamma : \delta_1 / (2c) \leq \gamma < \delta_1 / c$ верна оценка

$\|V(\alpha, \gamma\lambda)\| \leq \gamma^{k-1} b_2 / 4$. Без ограничения общности можно предполагать, что $\|X + P_k(u) + G(\alpha, u) + V(\alpha, u)\| < 2$, если $\alpha < \delta_2$ и $\gamma < \delta_1 / (2c)$, при этом $\|d(\alpha, u)\| < 2\|u\| < \delta_1$. Если же $\alpha < \delta_2$ и $\delta_1 / (2c) \leq \gamma < \delta_1 / c$, то $\|d(\alpha, u)\| \leq (1 - \gamma^{k-1} b_2 / 2)\|u\| < \delta_1$. Итак, произвольно выбрав $\varepsilon > 0$, получим, что $\|d(\alpha, u)\| < \|u\| < \varepsilon$ для всех $u: \|u\| < \delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ и $\alpha < \delta_2$. Тогда по индукции при всех $q \in N$ справедлива оценка $\|d_q(\alpha, u)\| < \varepsilon$, где $d_q(\alpha, u) = x(q\omega, a^* + u, \mu^*, \alpha) - a^*$. Следовательно, малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$ системы (1) α -устойчиво по определению. Теорема 5 доказана.

В условиях теоремы 5 имеет место не критический случай устойчивости по параметру, когда малое решение при его ветвлении от тривиального решения устойчиво по параметру в силу того, что тривиальное решение асимптотически устойчиво при невозмущенном значении параметра системы.

Учитывая условие (3), выделим какую-либо $n \times n$ -матрицу $P(u): P(u)u = p(a_0 + u, \mu_0, 1)$.

Теорема 6. Если выполняются условия теорем 1 и 2 и существуют числа $c > 0$ и $b > 0$, для которых при всех $\lambda: \|\lambda\| = c$ и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка $\|X + \gamma P(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b$, то малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*, \alpha)$ является α -устойчивым.

Доказательство теоремы 6 проводится по схеме, использованной в работах [3, 4].

В условиях теорем 5, 6 малое периодическое решение может оказаться неустойчивым по Ляпунову. Это иллюстрируется следующим примером.

Пример. Рассмотрим обобщенное уравнение типа Рэлея

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\omega_0^2 + \lambda_1)y + (\lambda_2 + (c_1 y^2 + c_2 \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2)) \frac{dy}{d\tau} + \alpha \bar{h}(t) = 0$$

с малыми параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \alpha > 0$, в котором $\bar{h}(t) = d_1 \sin(t) + d_2$. Выполним замену времени $\tau = t / \omega_0$, обозначим $x_1 = y$ и запишем это уравнение в форме системы вида (1)

$$\dot{x} = Ax + f_1(x, \lambda) + f_3(x) + \alpha h(t), \quad (13)$$

для которой $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}$,
 $f_3(x) = -\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 x_1^2 x_2 + c_2 x_2^2 \end{pmatrix}$, $h(t) = \text{colon}(0, \bar{h}(t))$.

Установим условия, при которых система (1) имеет малое устойчивое решение с периодом $\omega = 2\pi$.

Проверим необходимые условия ветвления. Так как $X - E = 0_{22}$, $b = -\text{colon}(d_1\pi - d_2, 0)$, то необходима связь $d_2 = d_1\pi$ среднего интегрального внешнего воздействия с его амплитудой. Поэтому далее предполагаем, что $\bar{h}(t) = d(\sin t + \pi)$.

В системе (13) будем предполагать, что $\lambda = \text{colon}(b_1\mu_1^2, b_2\mu_2^2)$, $\mu = \text{colon}(\mu_1, \mu_2)$ – малый параметр, и обозначать $\lambda = b\mu^2$. Тогда $g(x, \lambda) = f_1(x, \lambda) + f_3(x)$ – вектор-функция порядка 3 от переменных x и μ . Следовательно, первое нелинейное приближение оператора

монодромии $p(a, \lambda, \alpha) = \int_0^{2\pi} X(-t)g(X(t)a + \alpha b(t), \lambda)dt$ обладает свойством

$p(\alpha a, b(\alpha\mu)^2, \alpha) = \alpha^3 p(a, b\mu^2, 1)$. Направление ветвления (a_0, λ_0) малого периодического решения системы (13) должно удовлетворять условию

$$p(a, \lambda, 1) = 0_2, \quad (14)$$

которое рассмотрим как линейную систему от λ с основной матрицей

$$B = p'_\lambda(a, \lambda, 1) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \pi d - 2a_1 - 4\pi a_2 & -2\pi^2 d - 4\pi a_1 + 2a_2 \\ (1 + 2\pi^2)d + 4\pi a_1 + 2a_2 & \pi d + 2a_1 - 4\pi a_2 \end{bmatrix}.$$

Для разрешимости уравнения (14) достаточно выполнение условия

$$\det B = \frac{1}{16} (\pi^2(3 + 4\pi^2)d^2 + 2(1 + 4\pi^2)(2\pi a_1 - a_2)d + 4(4\pi^2 - 1)(a_1^2 + a_2^2)) \neq 0. \quad (15)$$

Например, условие (15) выполняется при $(2\pi a_1 - a_2)d \geq 0$. С практической точки зрения важен случай, когда факт существования малого периодического решения не зависит от конкретного значения d . Для этого достаточно, чтобы по направлению ветвления дискриминант левой части неравенства (15) был отрицательным

$$16\pi^2 a_1^2 - 4\pi(4\pi^4 + 1)^2 a_1 a_2 + (20\pi^2 - 16\pi^4 + 1 - 64\pi^6) a_2^2 < 0. \quad (16)$$

Из условия (8), в частности, следует, что вне зависимости от значения d при $a = a_0 = \text{colon}(0, a_{20})$ вычисляется значение $\lambda_0 = -B^{-1}p(a_0, 0_2, 1)$. Следовательно, пара (a_0, λ_0) удовлетворяет уравнению (14).

Проверим достаточное условие ветвления малого периодического решения

$$\text{rang}[p'_a(a_0, \lambda_0, 1) \quad p'_\mu(a_0, \lambda_0, 1)] = 2. \quad (17)$$

На этом этапе для формулировки содержательных условий о комбинациях коэффициентов системы (13), при которых существует малое периодическое решение, целесообразно прибегнуть к приближенным расчетам.

Допустим $d = 1$, $a_0 = \text{colon}(0, 1)$ и по условию (14) вычислим

$$\lambda_0 = \text{colon}(\lambda_{01}, \lambda_{02}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{01} &= \frac{\pi(c_1(18403 + 16751\pi^2 + 11520\pi^4) + c_2(2025 + 7425\pi^2 - 3456\pi^4))}{3456(4\pi^4 + 11\pi^2 - 6)}, \lambda_{02} = \\ &= \frac{c_1(65467\pi^2 - 216 - 19144\pi^4 - 10368\pi^6) + c_2(6912 - 1467\pi^2 - 19144\pi^4 - 3456\pi^6)}{2304(4\pi^4 + 11\pi^2 - 6)}. \end{aligned}$$

Тогда $\det p'_a(a_0, \lambda_0, 1) \approx -(7,1367c_1^2 + 41,4308c_1c_2 + 22,71c_2^2)$. Значит, для выполнения условия (17) достаточно выполнения неравенства $c_1c_2 \geq 0$, что согласуется с физически оправданными условиями $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$.

Итак, если $c_1c_2 \geq 0$, то система (13), в которой $\bar{h}(t) = \sin t + \pi$, по теореме 2 имеет малое 2π -периодическое решение с направлением ветвления (a_0, λ_0) , $a_0 = \text{colon}(0, 1)$, λ_0 определяется по условию (18).

Исследуем вопрос об устойчивости периодического решения. Для системы (13) при нулевых параметрах первое приближение оператора монодромии с учетом нелинейных слагаемых можно представить в виде $a + p(a, 0_2, 0) = [E + P(a)]a$,

$$P(a) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\pi(c_1 + 3c_2)(a_1^2 + a_2^2) & c_1a_1^2 + c_2a_2^2 \\ c_1a_1^2 + (3c_2 - 2c_2)a_2^2 & -\pi(c_1 + 3c_2)(a_1^2 + a_2^2) \end{bmatrix}.$$

Тогда при выборе матричных норм $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_\infty$ для выполнения условия вида (10) достаточно оценки $\pi(c_1 + 3c_2) > |c_1| + \max\{|c_2|, |3c_2 - 2c_1|\}$ (например, оценка верна при $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$). Значит, нулевое решение

системы (13) асимптотически устойчиво при нулевых значениях параметров, а малое периодическое решение системы (13) α -устойчиво по теореме 5.

Утверждение. Если $7,1367c_1^2 + 41,4308c_1c_2 + 22,71c_2^2 \neq 0$ и выполняется условие $\pi(c_1 + 3c_2) > |c_1| + \max\{|c_2|, |3c_2 - 2c_1|\}$, то у системы (13) при $\bar{h}(t) = \sin t + \pi$ существует малое α -устойчивое 2π -периодическое решение с направлением ветвления (a_0, λ_0) , $a_0 = \text{colon}(0, 1)$, λ_0 определяется по условию (18).

Численные эксперименты показывают, что при выборе параметров c_1, c_2 , допустимых для ветвления в силу сформулированного утверждения, возможны случаи неустойчивости периодического решения по линейному приближению, так как хотя бы один из модулей мультипликаторов матрицы $E + \alpha p'_a(a_0, \lambda_0, 1)$ больше 1 при малых $\alpha > 0$. В то же время свойство α -устойчивости гарантирует, что в окрестности малого периодического решения прочие решения ограничены, диаметр возможной области отталкивания бесконечно мал при $\alpha \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
2. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. М: Наука, 1986.
3. Абрамов В.В. Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13, № 4. С. 3–5.
4. Абрамов В.В. Двусторонняя устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2014. Т. 14, № 4. С. 6–9.
5. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
6. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. М.: Мир, 1971.
7. Морозов А.Д. К задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 4. С. 590–598.

УДК 515.177

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

**ОДНОРОДНЫЕ НЕРАСЩЕПИМЫЕ
СУПЕРМНОГООБРАЗЯ С РЕТРАКТОМ $\mathbb{C}P_{6,4,2,2}^{14}$**

Дано описание однородных нерасщепимых супермногообразий с ретрактом $\mathbb{C}P_{6,4,2,2}^{14}$.

Ключевые слова: однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, касательный пучок.

M. A. Bashkin

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

**NON-SPLIT HOMOGENEOUS SUPERMANIFOLDS
WITH RETRACT $\mathbb{C}P_{6,4,2,2}^{14}$**

This paper contains the description of homogeneous non-split supermanifolds with retract $\mathbb{C}P_{6,4,2,2}^{14}$.

Keywords: non-split homogeneous super manifolds, retract, tangent sheaf.

Представленная работа посвящена одной из задач классификации однородных комплексных супермногообразий [1-3]. Под комплексным супермногообразием размерности $m|n$ мы понимаем \mathbb{Z}_2 -градуированное пространство (M, O) , где M – комплексное многообразие, а O – пучок коммутативных супералгебр на M , локально изоморфное паре $(U, \Lambda_{F_m}(\xi_1, \dots, \xi_n))$, где U – область в \mathbb{C}^m и F_m – пучок голоморфных функций в \mathbb{C}^m . В частности, любое голоморфное векторное расслоение E над комплексным многообразием (M, F) определяет комплексное супермногообразие $(M, \Lambda_F E)$, где E – пучок голоморфных сечений расслоения E . Супермногообразие называется однородным, если супералгебра голоморфных векторных полей транзитивна на нем, т. е. порождает касательное суперпространство в каждой его точке.

Изучение однородных комплексных супермногообразий было начато в 80-х годах Ю. И. Маниным, который построил супермногообразия флагов, связанные с различными сериями классических линейных супералгебр Ли [4]. В 1996 году А. Л. Онищик в [5] поставил следующую задачу:

классифицировать с точностью до изоморфизма все однородные комплексные супермногообразия вида (M, O) , где M – заданное компактное комплексное однородное многообразие.

Как известно, с каждым комплексным супермногообразием (M, O) связано более просто устроенное комплексное супермногообразие (M, O_{gr}) , называемое его ретрактом, которое расщепимо, то есть определяется некоторым голоморфным векторным расслоением E над M . Легко показать (см., например, [7]), что ретракт однородного супермногообразия также является однородным. Обратное не верно. Поэтому из общей задачи классификации можно выделить следующую подзадачу (см. [5]):

для заданного расщепимого однородного супермногообразия (M, O_{gr}) классифицировать с точностью до изоморфизма все однородные супермногообразия, имеющие его в качестве ретракта.

Эта подзадача в настоящее время является довольно мало изученной.

Пусть $M = \mathbf{CP}^m$. При $m \geq 2$ однородные супермногообразия вида (M, O) были перечислены А. Л. Онищиком и О. В. Платоновой в работах [8] и [9] при определенных условиях на нечетную размерность супермногообразий. Далее, В. А. Бунегина и А. Л. Онищик полностью исследовали в [7] случай $m = 1$ при условии, когда нечетная размерность супермногообразия $n = 2$ или 3. Оказалось, что при $n = 2$ существует только одно нерасщепимое однородное супермногообразие вида (\mathbf{CP}^1, O) . Это суперквадрика в $\mathbf{CP}^{1|2}$, которая была построена ранее независимо П. Грином (P. Green) и В. П. Паламодовым как один из первых примеров нерасщепимых комплексных супермногообразий. При $n = 3$ существует серия нерасщепимых однородных супермногообразий, параметризованная целым числом $k = 0, 2, 3, \dots$

Изучение случая $n = 4$ было начато в [10], где было построено однопараметрическое семейство нерасщепимых однородных супермногообразий, ретрактом которых является сфера Римана (или комплексная проективная суперпрямая) размерности $1|4$ и продолжается в данной работе. Как показано в [7], голоморфное векторное расслоение ранга n над $M = \mathbf{CP}^1$, определяющее однородное расщепимое супермногообразие, имеет вид

$\bigoplus_{i=1}^n L_{-k_i}$, где все $k_i \geq 0$ и через L_k обозначается голоморфное линейное расслоение степени k .

Мы построим семейство однородных нерасщепимых супермногообразий, связанное с однородным расщепимым супермногообразием $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{14}$, определяемым голоморфным векторным расслоением $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{CP}^1$ ранга 4 вида $\mathbf{E} = L_{-6} \oplus L_{-4} \oplus 2L_{-2}$. Покроем \mathbf{CP}^1 двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = 1/x$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{14}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид

$$y = x^{-1}, \quad \eta_1 = x^{-6} \xi_1, \quad \eta_2 = x^{-4} \xi_2, \quad \eta_3 = x^{-2} \xi_3, \quad \eta_4 = x^{-2} \xi_4,$$

где ξ_i и η_i – базисные сечения расслоения \mathbf{E} над U_0 и U_1 соответственно.

Обозначим через T_{gr} градуированный касательный пучок супермногообразия $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{14}$ и через $\mathfrak{v}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ супералгебру Ли векторных полей на нем.

Рассмотрим точную последовательность (см. [7])

$$0 \rightarrow \text{End } \mathbf{E} \rightarrow \mathfrak{v}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Подалгебра $\alpha \subset \mathfrak{v}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0$ расщепляет эту точную последовательность если β изоморфно отображает ее на $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму $\mathfrak{v}(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})_0 = \text{End } \mathbf{E} \oplus \alpha$. В работе [7] показано, что супермногообразии с ретрактом $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\text{gr}})$ четно-однородно тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра α , расщепляющая (1). В этой ситуации мы будем говорить, что супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$ является четно-однородным относительно α . В нашем случае с точностью до автоморфизма из $\text{Aut } \mathbf{E}$ существуют две расщепляющие подалгебры $\alpha_i \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, $i = 1, 2$, которые можно задать следующими базисами (см. [7]):

$$\alpha_1: \quad e = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - \nabla, \quad f = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} - x\nabla;$$

$$\alpha_2: \quad e = \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x},$$

$$h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 6\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4},$$

$$f = \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2 \frac{\partial}{\partial x} - x\nabla.$$

$$\text{Здесь } \nabla = 6\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2 \left(\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right).$$

Рассмотрим подпучок $\text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} = \exp((T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4)$ пучка Aut O_{gr} . Согласно теореме Грина (P.Green), множество супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \text{O}_{\text{gr}})$ изоморфно множеству орбит группы $\text{Aut}(\mathbf{E})$ на множестве $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$. Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии $U = \{U_0, U_1\}$.

Можно доказать следующее

Предложение 1. *Предположим, что $n < 6$ и $H^0(M, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$. Пусть заданы такие подпространства $Q_{2p} \subset Z^1(U, (T_{\text{gr}})_2)$ ($p = 1, 2$), что каждый класс когомологий из $H^1(M, (T_{\text{gr}})_2)$ содержит ровно по одному коциклу из Q_{2p} ($p = 1, 2$). Тогда любой класс когомологий из $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$ представляется единственным коциклом вида $z = \exp(u^2 + u^4)$, где $u^2 \in Q_2$, $u^4 \in Q_4$.*

Будем говорить далее о задании супермногообразия (M, O) коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что (M, O) соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [11], можно доказать, что:

- 1) справедливо равенство $H^0(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$;
- 2) вычислить базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_q)$, $q = 2, 4$.

Проведем исследование на четно-однородность супермногообразий с ретрактом $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{14}$. Обозначим через $H^1(\mathbf{CP}^1, T_{\text{gr}})^\alpha$ множество α -инвариантных классов когомологий.

Предложение 2. *Базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^{\alpha_i}$, где $\alpha_i, i = 1, 2$, – расщепляющая подалгебра, может быть представлен следующими коциклами:*

- 1) $i = 1$:

$$x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 3x^{-2} \xi_3 \xi_4 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2x^{-2} \xi_3 \xi_4 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1};$$

- 2) $i = 2$: $x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$

Предложение 3. *Для любой расщепляющей подалгебры α имеем $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_4)^\alpha = \{0\}$.*

Пусть $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} \rightarrow (T_{\text{gr}})_2$ – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма α 2-компоненту элемента $\log \alpha$ в $(T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4$. Из предложений 1 и 3 можно вывести

Предложение 4. *Если α – подалгебра, расщепляющая последовательность (1) и если $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})^\alpha$ – множество классов, определяющих четно-однородные относительно α супермногообразия, то λ_2^* биективно отображает это множество на $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$.*

Иначе говоря, четно-однородные относительно α супермногообразия задаются коциклами $u^2 + u^4$, где класс $[u^2]$ α -инвариантен, а класс $[u^4]$ может быть определен с помощью предложения 5.1 из [6]. Далее, α -инвариантные классы $[u^2]$ описаны в предложении 2. Так как для них $[u^2; u^2] = 0$, то из предложения 5.1 работы [6] следует, что класс $[u^4]$ также должен быть α -инвариантным. Используя предложение 3, получаем

Предложение 5. Для любой расщепляющей подалгебры α четно-однородные относительно α супермногообразия задаются коциклами из предложения 2.

Проведем теперь исследование на однородность полученных четно-однородных супермногообразий с ретрактом $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{14}$: Для этого будем использовать

Предложение 6. Пусть выполнены условия предложения 1, и пусть супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$ является четно-однородным относительно α_i . В случае $i = 1$ супермногообразии $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$ однородно тогда и только тогда, когда векторные поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ для $j = 1, \dots, 4$; поднимаются на

$(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$, а в случае $i = 2$ – когда этим свойством обладают поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ для $j = 1, 2, 3$.

Доказательство. Согласно предложению 5 из [7], вопрос об однородности сводится к вопросу о сюръективности отображения $ev_o : \nu(M, \mathcal{O})_{\bar{1}} \rightarrow T_0(M, \mathcal{O})_{\bar{1}}$ для некоторой точки $o \in M$: Пусть o – точка в U_0 с координатой $x = 0$: Представим это отображение в виде $ev_o = e\tilde{\nu}_o \circ p_{-1}$, где $e\tilde{\nu}_o$ – отображение $\nu(M, \mathcal{O}_{gr}) \rightarrow T_0(M, \mathcal{O}_{gr})$, вычисляющее значение векторного поля в точке $o \in M$; p_{-1} – естественное отображение $\nu(M, \mathcal{O})_{\bar{1}} \rightarrow \nu(M, \mathcal{O}_{gr})_{-1}$. Очевидно, $W = \text{Im } p_{-1}$ является α -подмодулем в $\nu(M, \mathcal{O}_{gr})_{-1}$.

В случае $i = 1$ любой старший вектор α -подмодуля W есть линейная комбинация векторных полей $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ (см. [7]). Если $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$ однородно, то

$ev_o(W) \rightarrow T_0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})_{\bar{1}}$ и W содержит все $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, \dots, 4$; откуда следует,

что $W = \nu(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})_{-1}$. Следовательно, все поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ поднимаются. Обрат-

но, если все поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ поднимаются, то p_{-1} сюръективно. Поскольку элементы $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ натягивают $T_0(\mathbf{CP}^1, O)_{-1}$ для $x \in U_0$; то $e\tilde{\nu}_o$ сюръективно. Поэтому (\mathbf{CP}^1, O) однородно.

В случае $i = 2$ старшими векторами α -модуля $\nu(\mathbf{CP}^1, O)_{-1}$ являются $\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \frac{\partial}{\partial \xi_3}, 2x \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \frac{\partial}{\partial \xi_4}$ (см. [7]). Далее,

$$\left[f, \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right] = 2x \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \frac{\partial}{\partial \xi_4}, \quad (\text{ad } f)^r \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} \right) \in \text{Ker}(ev_o) \quad \text{при } r \geq 2;$$

$$(\text{ad } f)^r \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \in \text{Ker}(ev_o) \quad \text{при } r \geq 1, j = 1, 2, 4.$$

Отсюда следует, что если (\mathbf{CP}^1, O) однородно, то $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \in W, j = 1; 2;$

3: Следовательно, поля $\frac{\partial}{\partial \xi_j}, j = 1; 2; 3;$ поднимаются на (\mathbf{CP}^1, O) : Обрат-

но, если указанные поля поднимаются на (\mathbf{CP}^1, O) , то $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \in W, j = 1; 2; 3.$

Значит, W содержит соответствующие неприводимые компоненты модуля $\nu(\mathbf{CP}^1, O_{\text{gr}})_{-1}$, и потому $2x \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \frac{\partial}{\partial \xi_4} \in W$. Следовательно, ev_o сюръективно, а (\mathbf{CP}^1, O) однородно. \square

Из доказанного вытекает следующий окончательный результат.

Теорема 1. *Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $\mathbf{CP}_{6,4,2,2}^{1|4}, t > 2$, задаются линейной комбинацией следующих коциклов:*

$$1) \text{ для } \alpha_1: x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 3x^{-2} \xi_3 \xi_4 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2x^{-2} \xi_3 \xi_4 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1};$$

$$2) \text{ для } \alpha_2: x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

Доказательство. Рассмотрим коциклы, указанные в предложении 2, и применим к ним предложение 6. Используя критерий подъема

из [6] (предложение 5.1), в каждом случае супералгебры α_i ($i = 1, 2$) получаем, что нерасщепимые однородные супермногообразия задаются ненулевыми коциклами перечисленными в формулировке теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башкин М.А. Однородные нерасщепимые супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой // Математика в Ярославл. ун-те: сб. обзорных ст.: к 40-летию мат. фак-та. Ярославль: ЯрГУ, 2016. С.6-10.
2. Башкин М.А. Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вестник РГТУ им. П.А.Соловьева. 2015. №3(34). С.125-130.
3. Башкин М.А. Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой / М.А. Башкин, А.Л. Онищик // Математика, кибернетика, информатика: тр. междунар. науч. конф. памяти А. Ю. Левина. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 40–57.
4. Манин Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984. 336 с.
5. Онищик А.Л. О комплексных однородных супермногообразиях // Математика в Ярославл. ун-те: сб. обзорных ст. К 20-летию мат. ф-та. Ярославль, 1996. С. 133–153.
6. Onishchik A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V.16. P. 309–333.
7. Bunegina V.A. Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line / V.A.Bunegina, A.L.Onishchik // J. Math. Sci. 1996. V.82. P. 3503–3527.
8. Онищик А.Л. Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством, I / А.Л. Онищик, О.В. Платонова // Мат. сб. 1998. Т.189, № 2. С. 111–136.
9. Онищик А.Л. Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством, II / А.Л. Онищик, О.В. Платонова // Мат. сб. 1998. Т.189, №3. С. 421–441.
10. Bunegina V.A. Two families of flag supermanifolds / V.A. Bunegina, A.L. Onishchik // Different. Geom. and its Appl. V.4. 1994. P. 329–360.
11. Вишнякова Е.Г. Четно-однородные комплексные супермногообразия размерности 1|3 на сфере Римана // Современные проблемы математики и информатики: сб. науч. тр. молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып.7. Ярославль: ЯрГУ, 2005. С. 22–30.

УДК 517.5

А. В. Бородин

О НОВЫХ ПОЛУГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: *alvasborodin@mail.ru*

В работе получены новые полугрупповые свойства ортогональных полиномов и присоединенных к ним функций.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, присоединенные функции, полугрупповые свойства.

A. V. Borodin

ON THE NEW SEMI-GROUP PROPERTIES OF HERMITE POLYNOMIALS

*Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: e-mail: *alvasborodin@mail.ru**

We obtained new semi-group properties of orthogonal polynomials and functions adjugate to them.

Keywords: orthogonal polynomials, adjugate function, semi-group properties.

В работах автора [1, 2] для полиномов Эрмита (степени n)

$$H_n(x) := (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2) = D_n(1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

и присоединённых (обратных) к ним функциям (степени $-n$)

$$\begin{aligned} H_{-n}(x) &= D_{-n}(1) = (-1)^n \exp(x^2/2) \left(\int_{-\infty}^x dx \right)^n \exp(-x^2/2) = \\ &= (-1)^n \exp(x^2/2) \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-t^2/2) dt \end{aligned}$$

установлена следующая формула умножения

$$(P_n * Q_m)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \frac{d^k}{dx^k} Q_m(x),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ либо оба полиномы Эрмита, либо один из них полином Эрмита, а другой – присоединённая функция, при этом в первом случае результатом будет полином Эрмита степени $n+m$, а во втором – либо полином Эрмита степени $n+m$ (если $n+m \geq 0$), либо присоединённая функция степени $n+m$ (если $n+m < 0$). Тем самым, указанная операция умножения задает на множестве полиномов Эрмита и присоединённых функций полугрупповую структуру, изоморфную аддитивной полугруппе целых чисел.

Ниже аналогичные результаты получены для всех классических ортогональных многочленов и присоединённых (обратных) к ним функций. В качестве примера рассмотрены многочлены Якоби и их частный случай – полиномы Лежандра.

Пусть $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ произвольный интервал, где $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq +\infty$, $\alpha(x) \in \mathbb{C}^\infty(x_1, x_2)$ – функция, для которой

$$-\frac{d}{dx} \ln |\alpha(x)| = -\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = -\alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} \alpha(x) = R_\alpha(x). \quad (1)$$

Введём линейный дифференциальный оператор

$$l_\alpha = -\alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} \alpha(x) = -\frac{d}{dx} + R_\alpha(x), \quad (2)$$

действующий по правилу

$$l_\alpha(\varphi) = -\alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} (\alpha(x)\varphi(x)) = -\frac{d\varphi(x)}{dx} + R_\alpha(x)\varphi(x),$$

и линейный интегральный оператор

$$l_\alpha^{-1} = -\alpha^{-1}(x) \int_{x_k}^x dx \alpha(x) \quad (k=1, 2), \quad (3)$$

действующий по правилу

$$l_\alpha^{-1}(\varphi) = -\alpha^{-1}(x) \int_{x_k}^x \alpha(x)\varphi(x) dx \quad (k=1, 2),$$

где $x \in (x_1, x_2)$, а интеграл $\int_{x_k}^x \alpha(x)\varphi(x) dx$ может быть как собственным, так и несобственным (в точке x_k).

Нетрудно видеть, что на множестве $\mathbb{C}(x_1, x_2)$ непрерывных функций

$$l_\alpha \circ l_\alpha^{-1} = I,$$

где I – тождественный оператор. Тем самым, интегральный оператор l_α^{-1} является правым обратным к дифференциальному оператору l_α . Однако на множестве $\mathbb{C}^{(1)}(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемых функций

$$\begin{aligned} l_\alpha^{-1} \circ l_\alpha &= -\alpha^{-1}(x) \int_{x_k}^x \alpha(x) dx \left(-\alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} \alpha(x) \right) = \\ &= \alpha^{-1}(x) \int_{x_k}^x dx \frac{d}{dx} \alpha(x) = I - \alpha^{-1}(x) \lim_{x \rightarrow x_k} \alpha(x). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор (3) является левым обратным к оператору (2) на подмножестве $\mathbb{C}_\alpha^{(1)}(x_1, x_2) \subset \mathbb{C}^{(1)}(x_1, x_2)$ таких функций $\varphi(x)$, что

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \alpha(x) \varphi(x) = 0. \quad (4)$$

Дальше из двух значений x_1 и x_2 фиксируем то, для которого выполняется условие (4) (при минимальных требованиях на функцию φ). Обозначим это значение через x_0 .

Таким образом, на множестве $\mathbb{C}_\alpha^{(1)}(x_1, x_2)$ оператор l_α^{-1} является обратным к оператору l_α .

Рассмотрим теперь степени операторов (2), (3):

$$l_\alpha^n = \left(-\alpha^{-1}(x) \frac{d}{dx} \alpha(x) \right)^n = (-1)^n \alpha^{-1}(x) \frac{d^n}{dx^n} \alpha(x), \quad (5)$$

$$l_\alpha^{-n} = \left(-\alpha^{-1}(x) \int_{x_0}^x dx \alpha(x) \right)^n = (-1)^n \alpha^{-1}(x) \left(\int_{x_0}^x dx \right)^n \alpha(x). \quad (6)$$

Понятно, что интегральный оператор l_α^{-n} является правым обратным к дифференциальному оператору l_α^n на множестве функций $\mathbb{C}^{(n)}(x_1, x_2)$, но левым обратным к l_α^n он является на подмножестве функций $\mathbb{C}_\alpha^{(n)}(x_1, x_2) \subset \mathbb{C}^{(n)}(x_1, x_2)$ таких, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^i}{dx^i} (\alpha(x) \varphi(x)) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (7)$$

Поэтому оператор l_α^{-n} является обратным (правым и левым) к оператору l_α^n на множестве функций $\mathbb{C}_\alpha^{(n)}(x_1, x_2)$ (таковым же по отношению к l_α^{-n} является l_α^n).

Из сказанного вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Равенство*

$$l_\alpha^n \circ l_\alpha^m = l_\alpha^{n+m} \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \quad (8)$$

безусловно верно в двух случаях: 1) n и m одного знака, 2) $n \geq 0$ и $m \leq 0$; в третьем случае: 3) $n \leq 0$, $m \geq 0$ – оно верно при выполнении условия (7).

Заметим, что с помощью оператора (2) функцию (1) можно представить так:

$$R_\alpha(x) = l_\alpha(1).$$

В связи с этим имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{C}^\infty(x_1, x_2)$ и $R_\alpha(x) = l_\alpha(1)$, $R_\beta(x) = l_\beta(1)$,*

то

$$R_{\alpha\beta}(x) = R_\alpha(x) + R_\beta(x).$$

Далее, с помощью операторов (5), (6) можно определить функции

$$R_\alpha^n(x) = l_\alpha^n(1) \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (9)$$

причём $l_\alpha^0 = I$ и значит $R_\alpha^0(x) = 1$.

Лемма 3. *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}$ и $n \geq 0$, $m \geq n$. Если функции $\alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{C}^\infty(x_1, x_2)$ удовлетворяют условиям*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^i}{dx^i} \alpha(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^j}{dx^j} \beta(x) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m-1) \quad (11)$$

соответственно, то справедливо тождество

$$R_{\alpha\beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=-m}^n C_{m+n}^{m+k} l_\alpha^{-k} \left(R_\alpha^n(x) \right) l_\beta^k \left(R_\beta^m(x) \right), \quad (12)$$

или, что то же самое,

$$R_{\alpha\beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k l_\alpha^{m-k} \left(R_\alpha^n(x) \right) l_\beta^{k-m} \left(R_\beta^m(x) \right). \quad (12')$$

Доказательство. С помощью формул Лейбница и (8), условия (10), функций (9) оператор (5) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 l_{\alpha}^n &= (-1)^n \alpha^{-1}(x) \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \alpha(x) \frac{d^i}{dx^i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \left((-1)^i \alpha^{-1}(x) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \alpha(x) \right) \frac{d^i}{dx^i} = \\
 &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{n-i}(1) \frac{d^i}{dx^i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{-i} \left(l_{\alpha}^n(1) \right) \frac{d^i}{dx^i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{-i} \left(R_{\alpha}^n(x) \right) \frac{d^i}{dx^i}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Подействуем этим оператором на функцию $\beta = \beta(x)$:

$$l_{\alpha}^n(\beta) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{-i} \left(R_{\alpha}^n(x) \right) \frac{d^i}{dx^i} \beta(x).$$

Затем на полученное равенство — оператором

$$\beta^{-1}(x) l_{\alpha}^m = (-1)^m (\alpha(x)\beta(x))^{-1} \frac{d^m}{dx^m} \alpha(x).$$

Слева согласно (9) получим функцию

$$(-1)^{n+m} (\alpha(x)\beta(x))^{-1} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} ((\alpha(x)\beta(x))) = R_{\alpha\beta}^{n+m}(x);$$

справа – согласно формулам Лейбница и (8), условию (11)

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (-1)^m \alpha^{-1}(x) \beta^{-1}(x) \frac{d^m}{dx^m} \alpha(x) \left(l_{\alpha}^{-i} \left(R_{\alpha}^n(x) \right) \frac{d^i}{dx^i} \beta(x) \right) = \\
 &= \\
 &\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (-1)^m \alpha^{-1}(x) \beta^{-1}(x) \sum_{j=0}^m C_m^j \frac{d^j}{dx^j} \alpha(x) \frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}} \left(l_{\alpha}^{-i} \left(R_{\alpha}^n(x) \right) \frac{d^i}{dx^i} \beta(x) \right) = \\
 &= \sum_{i=0}^n C_n^i \sum_{j=0}^m C_m^j l_{\alpha}^{j-i} \left(R_{\alpha}^n(x) \right) l_{\alpha}^{-j} \left(R_{\alpha}^m(x) \right),
 \end{aligned}$$

которое, если сгруппировать слагаемые по правилу $j-i=k$, где $k = -m, -(m-1), \dots, -1, 0, \dots, n$, и воспользоваться тождествами

$$\sum_{i=1}^n C_n^i C_m^{i+\mu} = C_{m+n}^{m-\mu} = C_{m+n}^{n+\mu} \quad (0 \leq \mu \leq m-n),$$

$$\sum_{i=1}^n C_n^{i+\nu} C_m^i = C_{m+n}^{n-\nu} = C_{m+n}^{m+\nu} \quad (0 \leq \nu \leq n),$$

можно переписать ещё так

$$\sum_{k=-m}^n C_{m+n}^{m+k} l_{\alpha}^{-k} \left(R_{\alpha}^n(x) \right) l_{\beta}^k \left(R_{\beta}^m(x) \right).$$

Таким образом,

$$R_{\alpha \cdot \beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=-m}^n C_{m+n}^{m+k} l_{\alpha}^{-k}(R_{\alpha}^n(x)) l_{\beta}^k(R_{\beta}^m(x)),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. В то время как левая часть тождества (12) симметрична относительно параметров n , m и функций α , β , его правая часть не является таковой. Тому причиной является несимметричность при $m \neq n$ условий (10), (11). Чтобы устранить её, достаточно условия (10) и (11) заменить на условия:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^i}{dx^i} \alpha(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N-1), \quad (10')$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^i}{dx^i} \beta(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N-1), \quad (11')$$

где $N = \max\{m, n\}$.

Замечание 2. Ввиду леммы 1 тождество (12) можно переписать так:

$$R_{\alpha \cdot \beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=-m}^n C_{m+n}^{m+k} R_{\alpha}^{n-k}(x) R_{\beta}^{m+k}(x), \quad (14)$$

или, что то же самое,

$$R_{\alpha \cdot \beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k R_{\alpha}^{n+m-k}(x) R_{\beta}^k(x) \quad (14')$$

Замечание 3. Если подействовать оператором (13) на функцию $R_{\alpha}^m(x) = l_{\alpha}^m(1)$, то получим тождество

$$R_{\alpha}^{n+m}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{-i}(R_{\alpha}^n(x)) \frac{d^i}{dx^i} R_{\alpha}^m(x) = \sum_{i=0}^n C_n^i l_{\alpha}^{-i}(R_{\alpha}^n(x)) \alpha(x) l_{\alpha}^i(\alpha^{-1}(x) R_{\alpha}^m(x)). \quad (15)$$

При этом параметр m может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. $m \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через \mathcal{R} множество функций $\alpha(x) \in \mathbb{C}^{\infty}(x_1, x_2)$ таких, что

$$R_{\alpha}(x) = l_{\alpha}(1) = -\frac{1}{\alpha(x)} \frac{d\alpha(x)}{dx} = p_{\alpha}(x)/q(x), \quad (16)$$

где

$$p_{\alpha}(x) = a_{\alpha} x + b_{\alpha}, \quad (a_{\alpha}, b_{\alpha}) \in \mathbb{R}^2; \quad q(x) = a x^2 + b x + c \\ (a, b, c \in \mathbb{R} - \text{фиксированные числа}).$$

Тогда, если $\alpha(x), \beta(x) \in \mathcal{R}$, то $\alpha(x) \cdot \beta(x) \in \mathcal{R}$, причём в силу леммы 2

$$P_{\alpha \cdot \beta}(x) = P_{\alpha}(x) + P_{\beta}(x), \quad (17)$$

т.е. множество \mathcal{R} – мультипликативная двухпараметрическая группа, изоморфная аддитивной группе \mathbb{R}^2 .

Как известно [3–7], классические ортогональные многочлены степени $n \geq 0$ определяются по формуле Родрига

$$P_{\alpha}^n(x) = l_{\alpha}^n(q^n(x)) = (-1)^n \alpha^{-1}(x) \frac{d^n}{dx^n} (\alpha(x) q^n(x)), \quad (18)$$

где $\alpha(x) \in \mathcal{R}$. Если ввести функции

$$\alpha_n(x) = \alpha(x) q^n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (19)$$

то формулу (18) можно переписать так

$$P_{\alpha}^n(x) = q^n(x) l_{\alpha_n}^n(1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (20)$$

где по-прежнему $\alpha_n(x) \in \mathcal{R}$. В самом деле (см. (16)),

$$R_{\alpha_n}(x) = l_{\alpha_n}^n(1) = -\alpha^{-1}(x) q^{-n}(x) \frac{d}{dx} (\alpha(x) q^n(x)) = \frac{(a_{\alpha} - 2an)x + (b_{\alpha} - nb)}{q(x)} = \frac{a_{\alpha_n} x + b_{\alpha_n}}{q(x)}.$$

Следовательно, $\alpha_n(x) \in \mathcal{R}$.

Далее, из (9) и (20) следует, что

$$R_{\alpha_n}^n(x) = l_{\alpha_n}^n(1) = q^{-n}(x) P_{\alpha}^n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Подставляя (21) в формулу (12'), получим

$$q^{-n-m}(x) P_{\alpha_n \cdot \beta_n}^{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k l_{\alpha_n}^{m-k} (q^{-n}(x) P_{\alpha}^n(x)) l_{\beta_n}^{k-m} (q^{-m}(x) P_{\beta}^m(x)),$$

или, учитывая (19) (и, конечно, условия (10), (11) или (10'), (11')),

$$P_{\alpha \cdot \beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k l_{\alpha}^{m-k} (P_{\alpha}^n(x)) l_{\beta}^{k-m} (P_{\beta}^m(x)). \quad (22)$$

Если же выражение (21) подставить в первое равенство (15), то при условии (10) сначала получим равенство

$$q^{-n-m}(x) P_{\alpha}^{n+m}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{-i} (q^{-n}(x) P_{\alpha}^n(x)) \frac{d^i}{dx^i} (q^{-m}(x) P_{\alpha}^m(x))$$

или, учитывая (19),

$$P_{\alpha}^{n+m}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha}^{-i} (q^{-n}(x) P_{\alpha}^n(x)) q^m(x) \frac{d^i}{dx^i} (q^{-m}(x) P_{\alpha}^m(x)), \quad (23')$$

а потом (ввиду второго равенства (15)) равенство

$$P_{\alpha}^{n+m}(x) = \sum_{i=0}^n C_n^i l_{\alpha}^{-i} \left(P_{\alpha}^n(x) \right) l_{q^{-m}}^i \left(P_{\alpha}^n(x) \right), \quad (23)$$

причём $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$.

Однако тождество (23) (или (23')) можно распространить и на отрицательные значения $m \in \mathbb{Z}$, если формулу Родрига (18) обобщить на этот случай посредством оператора (6), а именно, положить (см. (18))

$$P_{\alpha}^m(x) = l_{\alpha}^m(q^{-m}(x)) = (-1)^m \alpha^{-1}(x) \left(\int_{x_0}^x dx \right)^{-m} \alpha(x) q^{-m}(x), \quad (24)$$

или (см. (20))

$$P_{\alpha}^m(x) = q^{-m}(x) l_{\alpha_m}^m(1) \quad (m = -1, -2, \dots), \quad (25)$$

где (см. (19))

$$\alpha_m(x) = \alpha(x) q^{-m}(x) \quad (m = -1, -2, \dots). \quad (26)$$

Отсюда (см. (21))

$$R_{\alpha_m}^m(x) = l_{\alpha_m}^m(1) = q^m(x) P_{\alpha}^n(x) \quad (m = -1, -2, \dots). \quad (27)$$

Функции (24) называются *присоединёнными* (к многочленам (18)) функциями.

Подставляя (27) в равенство (15), получим, если $n + m > 0$, равенство

$$q^{-(n+m)}(x) P_{\alpha}^{n+m}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha_n}^{-i} \left(q^{-n}(x) P_{\alpha}^n(x) \right) \frac{d^i}{dx^i} \left(q^m(x) P_{\alpha}^m(x) \right),$$

а если $n + m \leq 0$, равенство

$$q^{(n+m)}(x) P_{\alpha}^{n+m}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i l_{\alpha_n}^{-i} \left(q^{-n}(x) P_{\alpha}^n(x) \right) \frac{d^i}{dx^i} \left(q^m(x) P_{\alpha}^m(x) \right).$$

Таким образом, для $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ имеет место, если $n + m > 0$, представление

$$P_{\alpha}^{n+m}(x) = q^{2m}(x) \sum_{i=0}^n C_n^i l_{\alpha}^{-i} \left(P_{\alpha}^n(x) \right) l_{q^m}^i \left(P_{\alpha}^m(x) \right), \quad (28)$$

а если $n + m \leq 0$, представление

$$P_{\alpha}^{n+m}(x) = q^{-2n}(x) \sum_{i=0}^n C_n^i l_{\alpha}^{-i} \left(P_{\alpha}^n(x) \right) l_{q^m}^i \left(P_{\alpha}^m(x) \right). \quad (29)$$

Сформулируем полученные (относительно многочленов (18) и присоединённых к ним функций (24)) результаты в форме следующих теорем.

Теорема 1. Если для функций

$$\alpha_n(x) = \alpha(x)q^n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\beta_m(x) = \beta(x)q^m(x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\alpha(x) \in \mathcal{R}$, $\beta(x) \in \mathcal{R}$, выполнены условия (10), (11) соответственно, то справедлива формула (см. (22))

$$P_{\alpha\beta}^{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k l_{\alpha_n}^{m-k} \left(P_{\alpha}^n(x) \right) l_{\beta_n}^{k-m} \left(P_{\beta}^m(x) \right),$$

которую, если на множестве $\{P_{\alpha}^n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \alpha(x) \in \mathcal{R}\}$ многочленов (18) ввести операцию « * » по формуле

$$P_{\alpha}^n * P_{\beta}^m = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k l_{\alpha_n}^{m-k} \left(P_{\alpha}^n \right) l_{\beta_n}^{k-m} \left(P_{\beta}^m \right), \quad (30)$$

можно коротко переписать так:

$$P_{\alpha}^n * P_{\beta}^m = P_{\alpha \cdot \beta}^{n+m}, \quad (31)$$

превратив, тем самым, указанное множество в трёхпараметрическую полугруппу с единицей $P_1^0(x) = 1$ (изоморфную аддитивной полугруппе $\{(n, a_{\alpha}, b_{\alpha}) \in \mathbb{R}^3 : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, a_{\alpha}, b_{\alpha} \in \mathbb{R}\}$, если выполнены условия (10), (11)).

Теорема 2. Если для функций

$$\alpha_n(x) = \alpha(x)q^n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\alpha(x) \in \mathcal{R}$, выполнено условие (10) и

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } n, m \geq 0, \\ q^m(x), & \text{если } n \geq 0, m < 0, n+m \geq 0, \\ q^{-2n}(x), & \text{если } n \geq 0, m < 0, n+m < 0, \end{cases}$$

то справедливо равенство

$$P_{\alpha}^{n+m}(x) = r(x) \sum_{k=0}^n C_n^k l_{\alpha}^{-k} \left(P_{\alpha}^n(x) \right) l_{q^{-|m|}}^k \left(P_{\alpha}^m(x) \right), \quad (32)$$

которое, если на множестве $\{P_{\alpha}^n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \alpha(x) \in \mathcal{R}\}$ ввести операцию « * » по формуле

$$P_{\alpha}^n * P_{\alpha}^m = r \sum_{k=0}^n C_n^k l_{\alpha}^{-k} \left(P_{\alpha}^n \right) l_{q^{-|m|}}^k \left(P_{\alpha}^m \right), \quad (33)$$

можно переписать так:

$$P_{\alpha}^n * P_{\alpha}^m = P_{\alpha}^{n+m}, \quad (34)$$

и превратить, тем самым, указанное множество в дискретную однопараметрическую полугруппу с единицей $P_\alpha^0(x) = 1$, изоморфную для параметров $n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m \geq 0$ аддитивной полугруппе неотрицательных целых чисел. При этом каждому элементу $P_\alpha^n(x)$ ($n \geq 0$) отвечает единственный правый обратный элемент $P_\alpha^{-n}(x)$, т. е. $P_\alpha^n * P_\alpha^{-n} = 1$.

Из теоремы 2 можно получить формулу дифференцирования для многочленов (18) и обратных (или присоединённых) к ним элементов (24).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для многочленов (18) имеет место формула

$$P_\alpha^{n+1}(x) = \left((n-1) \frac{d}{dx} q(x) + p_\alpha(x) \right) P_\alpha^n(x) - q(x) \frac{d}{dx} P_\alpha^n(x). \quad (35)$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ и $n = 1$. Тогда согласно (32), (16), (18)

$$\begin{aligned} P_\alpha^{1+m}(x) &= \sum_{k=0}^1 C_1^k I_\alpha^{-k} \left(P_\alpha^1(x) \right) I_{q^{-|m|}}^k \left(P_\alpha^m(x) \right) = \\ &= P_\alpha^1(x) P_\alpha^m(x) + \left(-\alpha^{-1}(x) \int_{x_0}^x dx \alpha(x) P_\alpha^1(x) \right) \left(-q^m(x) \frac{d}{dx} q^{-m}(x) P_\alpha^m(x) \right) = \\ &= P_\alpha^1(x) P_\alpha^m(x) + q(x) \left(m P_\alpha^m(x) q(x)^{-1} \frac{d}{dx} q(x) - \frac{d}{dx} P_\alpha^m(x) \right) = \\ &= \left(P_\alpha^1(x) + m \frac{d}{dx} q(x) \right) P_\alpha^m(x) - q(x) \frac{d}{dx} P_\alpha^m(x) = \\ &= \left(p_\alpha(x) + (m-1) \frac{d}{dx} q(x) \right) P_\alpha^m(x) - q(x) \frac{d}{dx} P_\alpha^m(x), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Аналогично доказывается схожее утверждение для присоединённых функций (24).

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 для функций (24) справедлива формула

$$q^2(x) P_\alpha^{m+1}(x) = \left((m-1) \frac{d}{dx} q(x) + p_\alpha(x) \right) P_\alpha^m(x) - q(x) \frac{d}{dx} P_\alpha^m(x) \quad (m+1 \leq 0). \quad (36)$$

Отметим, что формулы (35) и (36) можно трактовать как рекуррентные соотношения, связывающие два последовательных классических многочлена (18) (две последовательные присоединённые функции (24)).

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим ортогональные многочлены Якоби (многочлены Эрмита с этих позиций представлены в работах [1, 2]). Для них теоремы 1 и 2 принимают следующий вид.

Теорема 3 (о полугрупповых свойствах многочленов Якоби).

Многочлены Якоби

$$P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) = (-1)^n (1-x)^{\alpha_1} (1+x)^{\alpha_2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{\alpha_1+n} (1+x)^{\alpha_2+n} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (37)$$

для которых

$$\alpha(x) = (1-x)^{\alpha_1} (1+x)^{\alpha_2} \quad (\alpha_1, \alpha_2 > -1), \quad (38)$$

$$q(x) = 1 - x^2, \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

относительно операций (30) образуют коммутативную трехпараметрическую полугруппу, а именно,

$$P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)} * P_m^{(\beta_1, \beta_2)} = P_{n+m}^{(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2)}, \quad (39)$$

а относительно операций (33) образуют коммутативную однопараметрическую дискретную полугруппу, а именно,

$$P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)} * P_m^{(\alpha_1, \alpha_2)} = P_{n+m}^{(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad (40)$$

причём $(\forall n \in \mathbb{N})$ элемент $P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ имеет относительно операции (33) правый обратный элемент

$$\left(P_n^{(\alpha_1, \alpha_2)} \right)^{-1} = P_{-n}^{(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае оператор (2) имеет вид

$$l_\alpha = -(1-x)^{-\alpha_1} (1+x)^{-\alpha_2} \frac{d}{dx} (1-x)^{\alpha_1} (1+x)^{\alpha_2},$$

и, следовательно,

$$R_\alpha(x) = l_\alpha(1) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 - \alpha_2)}{1 - x^2}.$$

Отсюда

$$p_\alpha(x) = (\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 - \alpha_2), \quad q(x) = 1 - x^2;$$

$$\alpha_n(x) = \alpha(x) q^n(x) = (1-x)^{\alpha_1+n} (1+x)^{\alpha_2+n}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{d^k}{dx^k} \alpha_n(x) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

т.е. условия (10) выполнены и для точки $x_1 = -1$ и для точки $x_2 = +1$. Поэтому в качестве x_0 в (б) можно взять одну из них и сослаться на теоремы 1 и 2.

Заметим, что теорема 3 справедлива для полиномов Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева (первого и второго родов) и присоединённых к ним функций, поскольку они являются частным случаем многочленов Якоби и присоединённых к ним функций. При этом особо следует отметить полиномы Лежандра $P_n(x) = P_1^n(x)$, так как для них

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha(x) = 1,$$

коммукативное полугрупповое соотношение (22) (которое в данном случае предпочтительнее соотношения (32)) принимает вид

$$P_1^{n+m}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k l_1^{m-k} (P_1^n(x)) l_1^{k-m} (P_1^m(x)) = (P_1^n * P_1^m)(x), \quad (41)$$

где $l_1^n = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}$, если $n \geq 0$, и $l_1^n = (-1)^n \left(\int_{x_0}^x dx \right)^n$, если $n \leq 0$.

Аналогичные, но менее «компактные» полугрупповые соотношения (свойства) можно получить для остальных частных случаев многочленов Якоби. Но об этом и многочленах Лагерра (обратных к ним функциях) в последующих работах. При этом будут исследованы барианалоги ортогональных многочленов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А.В.* Однопараметрическая дискретная полугруппа Эрмита // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: сб. науч. тр. Ярославль: ЯрГУ, 1994. С.149-153.
2. *Бородин А.В.* О новых полугрупповых свойствах ортогональных полиномов Эрмита // ММТТ-27: сб. тр. XXVII Междунар. науч. конф. В 12 т. Т.1. Тамбов: ТГТУ, 2014. С.16-19.
3. *Багров В.Г.* Методы математической физики. Специальные функции / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. Томск: НТЛ, 2002. 352 с.
4. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1976. 296 с.
5. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ГИИЛ, 1948. 260 с.
6. *Никифоров А.Ф.* Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. М.: Наука, 1984. 344 с.
7. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

УДК 511.176

Т. П. Гой

Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника
Украина, г. Ивано-Франковск, e-mail: tarasgoy@yahoo.com

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ ТЕПЛИЦА-ХЕССЕНБЕРГА И ЧИСЛА ЛЮКА

Выведены формулы для вычисления определителей матриц Теплица-Хессенберга специального вида, элементами которых являются числа Люка.

Ключевые слова: матрица Теплица-Хессенберга, числа Люка, числа Фибоначчи, определитель.

T. P. Goy

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Ukraine, Ivano-Frankivsk, e-mail: tarasgoy@yahoo.com*

ON DETERMINANTS OF TOEPLITZ-HESSENBERG MATRICES AND LUCAS NUMBERS

In this short note, we study three families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Lucas numbers.

Keywords: Toeplitz-Hessenberg matrix, Lucas numbers, Fibonacci numbers, determinant.

Введение. Матрицей Теплица-Хессенберга n -го порядка называется матрица вида

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Матрицы вида (1) используются во многих разделах математики и техники (см., например, [1, 2, 7] и библиографию там).

Определитель матрицы Теплица-Хессенберга вида (1) можно найти, используя рекуррентную формулу

$$\det A_n = a_1 \det A_{n-1} + \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_0^{n-j} a_{n+1-j} \det A_{j-1}, \quad (2)$$

где $\det A_0 \equiv 1$. Формула (2) является следствием более общей формулы, из [16, теорема 4.20].

Следующая формула, которая известна как формула Труды [12], дает возможность найти определитель матрицы (1) через ее элементы:

$$\det A_n = (-a_0)^n \cdot \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)! \cdot a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_n^{s_n}}{s_1! s_2! \dots s_n! \cdot a_0^{s_1+s_2+\dots+s_n}}. \quad (3)$$

Определители матриц Теплица-Хессенберга, составленных из чисел Люка. Последовательность Люка $\{L_n\}_{n \geq 1}$ – это последовательность целых чисел, удовлетворяющая рекуррентному уравнению

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

с начальными условиями $L_1 = 2, L_2 = 0$ (последовательность A000032 в OEIS – Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [13]).

Последовательность $\{L_n\}_{n \geq 1}$ начинается так:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \dots$$

Числа Люка также можно выразить как функцию от номера n по формуле

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

где $(1+\sqrt{5})/2$ – золотое сечение [10].

Числа Люка нашли широкое использование, в частности, в теории графов, криптографии, физике [3, 6, 10, 14].

Известно, что числа Люка связаны с числами Фибоначчи F_n с помощью формул [10]

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n-1} + F_n, \quad F_n = (L_{n-1} + L_{n+1})/5.$$

Другие интересные формулы, связывающие эти знаменитые числовые последовательности, можно найти в [14, 15].

Рассмотрим последовательность матриц Теплица-Хессенберга $\{M_n\}_{n \geq 1}$, элементами которых являются числа Люка:

$$M_n = \begin{pmatrix} L_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ L_2 & L_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n-1} & L_{n-2} & L_{n-3} & \dots & L_1 & 1 \\ L_n & L_{n-1} & L_{n-2} & \dots & L_2 & L_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $M_0 \equiv 1$.

Теорема 1. Для определителя матрицы Тейлица-Хессенберга M_n из (5) справедлива формула

$$\det M_n = \frac{5 \cdot 2^{n-1} - (-1)^n}{3}. \quad (6)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции по n . Для $n=1$ $\det M_1 = (5 \cdot 2^0 - (-1))/3 = 2$. Предположим, что формула (6) справедлива для всех $k \leq n-1$ и докажем ее для $k=n$. Используя формулы (2), (4), имеем

$$\begin{aligned} \det M_n &= 2 \det M_{n-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} L_{n+1-k} \det M_{k-1} = \\ &= 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^{n-2} - (-1)^{n-1}}{3} + (-1)^{n+1} L_n + \sum_{k=2}^n (-1)^{n+k} L_{n+1-k} \frac{5 \cdot 2^{k-2} - (-1)^{k-1}}{3} = \\ &= \frac{5 \cdot 2^{n-1} + (-1)^n \cdot 2}{3} + (-1)^{n+1} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n (-1)^{n-k} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-k} \right) \cdot \frac{5 \cdot 2^{k-2} - (-1)^{k-1}}{3}, \end{aligned}$$

откуда, после несложных преобразований, получаем формулу (6). Теорема доказана.

Заметим, что аналогичная (6) формула для определителя матрицы Тейлица-Хессенберга, элементами которого являются числа Фибоначчи, анонсирована в [5].

Пусть $\{D_n\}_{n \geq 1}$ и $\{G_n\}_{n \geq 1}$ – последовательности матриц Тейлица-Хессенберга, составленных из чисел Люка с парными и непарными индексами соответственно, т.е.

$$D_n = \begin{pmatrix} L_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_4 & L_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{2n-2} & L_{2n-4} & L_{2n-6} & \cdots & L_2 & 1 \\ L_{2n} & L_{2n-2} & L_{2n-4} & \cdots & L_4 & L_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$G_n = \begin{pmatrix} L_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_3 & L_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{2n-3} & L_{2n-5} & L_{2n-7} & \cdots & L_1 & 1 \\ L_{2n-1} & L_{2n-3} & L_{2n-5} & \cdots & L_3 & L_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Теорема 2. Для определителей матриц D_n , G_n из (7) и (8), справедливы формулы

$$\det D_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left((2i+1)(1-i)^{n-1} - (2i-1)(1+i)^{n-1} \right), \quad (9)$$

$$\det G_n = \frac{5 + (-2)^{n-1}}{3}, \quad (10)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Доказательство формул (9) и (10) производится с помощью метода математической индукции, аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. Последовательности определителей $\{M_n\}_{n \geq 1}$, $\{D_n\}_{n \geq 1}$ и $\{G_n\}_{n \geq 1}$ образуют числовые последовательности A048573, A078069 и A140966 соответственно [13]:

$$\{M_n\}_{n \geq 0} = \{2, 3, 7, 13, 27, 53, 107, 213, 427, 853, 1707, 3413, 6827, \dots\},$$

$$\{D_n\}_{n \geq 0} = \{1, -3, 4, -2, -4, 12, -16, 8, 16, -48, 64, -32, -64, 192, \dots\},$$

$$\{G_n\}_{n \geq 0} = \{2, 1, 3, -1, 7, -9, 23, -41, 87, -169, 343, -681, 1367, \dots\}.$$

Другие формулы для определителей, элементами которых являются числа Люка, изучены, в частности, в работах [4, 8, 9, 11].

Основной результат. Используя теперь формулу (3) как следствие формул (6), (9), (10), после несложных преобразований получаем следующие формулы, выражающие суммы произведений чисел Люка с полиномиальными коэффициентами.

Теорема 3. Для чисел Люка L_n справедливы формулы

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)!}{s_1!s_2!\dots s_n!} L_1^{s_1} L_2^{s_2} \dots L_n^{s_n} = \frac{5 \cdot (-2)^n - 2}{6},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)!}{s_1!s_2!\dots s_n!} L_2^{s_1} L_4^{s_2} \dots L_{2n}^{s_n} = \frac{1}{2} \left((2i-1)(1+i)^{n-1} - (2i+1)(1-i)^{n-1} \right),$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\dots+s_n)!}{s_1!s_2!\dots s_n!} L_1^{s_1} L_3^{s_2} \dots L_{2n-1}^{s_n} = \frac{10 \cdot (-1)^n - 2^n}{6},$$

где $n \geq 1$, $i = \sqrt{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoya J.M.* Asymptotics of individual eigenvalues of a class of large Hessenberg Toeplitz matrices / J.M. Bogoya, A. Bottcher, S.M. Grudsky // *Oper. Theory Adv. Appl.* 2012. Vol. 220. P. 77-95.
2. *Chang X.-W.* Asymptotic properties of the QR factorization of banded Hessenberg-Toeplitz matrices / X.-W. Chang, M.J. Gander, S. Karaa. // *Numer. Linear Algebra Appl.* 2005. Vol. 12 (7). P. 659-682.
3. *Demirturk B.* Integer solutions of some Diophantine equations via Fibonacci and Lucas numbers / B. Demirturk, R. Keskin // *J. Integer Seq.* 2009. Vol. 12. Article 09.8.7.
4. *Harne S.* Determinantal identities of Fibonacci, Fibonacci Like and Lucas numbers / S. Harne, V.H. Badshah, S. Sethiya // *Turkish J. Analysis Number Theory.* 2014. Vol. 2 (4). P. 110-112.
5. *Goy T.* Elementary problems and solutions. Problem B-1192 // *Fibonacci Quart.* 2016. Vol. 54 (3). P. 272.
6. *Hoggatt V.E., Jr.* Fibonacci and Lucas Numbers. Boston: Houghton Mifflin, 1969.
7. *Inselberg A.* On determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices arising in power series // *J. Math. Anal. Appl.* 1978. Vol. 63 (2). P. 347-353.
8. *Ipek A.* On the determinants of pentadiagonal matrices with the classical Fibonacci, generalized Fibonacci and Lucas numbers // *Eurasian Math. J.* 2011. Vol. 2 (2). P. 60-74.
9. *Jina J.* On determinants of some triadiagonal matrices connected with Fibonacci numbers / J. Jina, P. Trojovsky // *Int. J. Pure Appl. Math.* 2013. Vol. 88 (4). P. 569-575.
10. *Koshy T.* Fibonacci and Lucas Numbers and Application. New York: John Wiley & Sons, 2001.
11. *Kwong H.* Two determinants with Fibonacci and Lucas entries // *Appl. Math. Comp.* 2007. Vol. 194 (2). P. 568-571.
12. *Merca M.* A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix // *Spec. Matrices.* 2013. Vol. 1. P. 10-16.
13. *Sloane N.J.A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://ocis.org>.
14. *Vajda S.* Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Application. Chichester: Ellis Horwood, 1989.
15. *Vitula R.* Bridges between different known integer sequences / R. Vitula, D. Slota, E. Hetmaniok // *Ann. Math. Informat.* 2013. Vol. 41. P. 255-263.
16. *Vein R.* Determinants and Their Applications in Mathematical Physics / R. Vein, P. Dale. New York: Springer, 1999.

УДК 519.217.1

Г. А. Зверкина

Московский государственный университет путей сообщения,
Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова
Россия, г. Москва, e-mail: zverkina@gmail.com

О СКЛЕИВАНИИ СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВЕРСИЙ ПЕРЕСКОКА ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ¹

Предлагается новая модификация метода склеивания (coupling method) для перескока процесса восстановления в непрерывном времени. Эта модификация может быть применена к регенерирующим и квазирегенерирующим случайным процессам, и она позволяет находить строгие оценки скорости сходимости распределения процесса; для случая “тяжёлых” хвостов было получено улучшение классических результатов.

Ключевые слова: метод склеивания, процесс восстановления, перескок, регенерирующий процесс, скорость сходимости, метрика полной вариации.

G. A. Zverkina

*Moscow State University of Railway Engineering,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences
Russia, Moscow, e-mail: zverkina@gmail.com*

ABOUT COUPLING METHOD FOR STATIONARY AND NON-STATIONARY VERSIONS OF THE BACKWARD RENEWAL PROCESS²

We give a new modification of the coupling method for the backward renewal process in continuous time. This modification can be applied for regenerative and quasi-regenerative processes to obtain strong bounds for convergence rate of the distribution of the process in the total variation metrics. Also this modification improves classic results in the case of a heavy tails.

Keywords: coupling method, backward renewal process, regenerative process, convergence rate, total variation metrics.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00319А.

² The work is supported by RFBR grant No 14-01-00319 A.

Введение. Как известно, случайный процесс $(X_t, t \geq 0)$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \sigma(\Omega), \mathbf{P})$ и принимающий значения в пространстве состояний \mathcal{X} , снабжённом сигма-алгеброй $\sigma(\mathcal{X})$, называется *Марковским*, если для любых $A_i \in \sigma(\mathcal{X})$ и $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_n \geq 0$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{X_{t_0} \in A_0 \mid X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n\right\} = \\ = \mathbf{P}\left\{X_{t_0} \in A_0 \mid X_{t_1} \in A_1\right\}; \end{aligned}$$

поведение процесса $(X_t, t \geq 0)$ определяется его переходной функцией $\Phi(s, t, A, B) = \mathbf{P}\{X_t \in B \mid X_s \in A\}$, $t > s \geq 0$. Если переходная функция однородна по времени, т.е. $\Phi(s, t, A, B) = \tilde{\Phi}(s-t, A, B)$, то Марковский процесс $(X_t, t \geq 0)$ называется *однородным* (см. подробнее [4]). В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные Марковские процессы.

Нас интересует поведение распределения $\mathcal{P}_t^x(A) = \mathbf{P}\{X_t \in A\}$ однородного Марковского процесса $(X_t, t \geq 0)$ с начальным состоянием $X_0 = x$.

Рассмотрим две различные *независимые* версии $(X'_t, t \geq 0)$ и $(X''_t, t \geq 0)$ процесса $(X_t, t \geq 0)$, отличающиеся начальным состоянием $(X'_0 = x', X''_0 = x'')$ и имеющие ту же переходную функцию, что и процесс $(X_t, t \geq 0)$.

Каждому элементу ω множества Ω соответствует траектория $X_t(\omega)$, являющаяся непрерывной справа и имеющей предел слева функцией аргумента t , т.е. процессам $(X'_t, t \geq 0)$ и $(X''_t, t \geq 0)$ соответствуют траектории $X'_t(\omega)$ и $X''_t(\omega)$.

Если в некоторый (случайный) момент времени τ эти траектории совпали, т.е. $X'_\tau = X''_\tau = x$, то для всех $t > \tau$ распределения процессов $(X'_t, t \geq 0)$ и $(X''_t, t \geq 0)$ совпадают, поскольку

$$\mathbf{P}\left\{X'_t \in A \mid X_\tau = x\right\} = \mathbf{P}\left\{X''_t \in A \mid X_\tau = x\right\} \text{ при } t \geq \tau.$$

На этом соображении основан *метод склеивания (coupling method)*, впервые предложенный в [7], см. также [10]. Он заключается в следующем.

Пусть $\tau = \inf \{t \geq 0 | X'_t = X''_t\}$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_t^{x'}(A) - \mathcal{P}_t^{x''}(A)| &= |\mathbf{P}\{X'_t \in A\} \mathbf{1}\{\tau \leq t\} - \mathbf{P}\{X''_t \in A\} \mathbf{1}\{\tau \leq t\}| + \\ &+ |\mathbf{P}\{X'_t \in A\} \mathbf{1}\{\tau > t\} - \mathbf{P}\{X''_t \in A\} \mathbf{1}\{\tau > t\}| = \\ &= 0 + |\mathbf{P}\{X'_t \in A\} \mathbf{1}\{\tau > t\} - \mathbf{P}\{X''_t \in A\} \mathbf{1}\{\tau > t\}| \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{\tau > t\}, \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{1}\{B\}$ – индикатор события B .

Понятно, что случайная величина τ зависит от начальных состояний (или распределений) процессов $(X'_t, t \geq 0)$ и $(X''_t, t \geq 0)$: $\tau = \tau(x', x'')$. Если известна оценка $\mathbf{P}\{\tau(x', x'') > t\} \leq r(t, x', x'')$, то

$$|\mathcal{P}_t^{x'}(A) - \mathcal{P}_t^{x''}(A)| \leq r(t, x', x''), \text{ и}$$

$$\|\mathcal{P}_t^{x'}(A) - \mathcal{P}_t^{x''}(A)\|_{TV} = 2 \sup_{A \in \sigma(X)} |\mathcal{P}_t^{x'}(A) - \mathcal{P}_t^{x''}(A)| \leq 2r(t, x', x'')$$

Обычно оценка вида $\mathbf{P}\{\tau(x', x'') > t\} \leq r(t, x', x'')$ может быть получена следующим образом: пусть для некоторой неубывающей положительной функции $\varphi(t)$ имеется оценка $\mathbf{E}\varphi(\tau(x', x'')) \leq V(x', x'')$; тогда по неравенству Маркова имеем

$$|\mathcal{P}_t^{x'}(A) - \mathcal{P}_t^{x''}(A)| \leq \mathbf{P}\{\varphi(\tau) > \varphi(t)\} \leq \frac{\mathbf{E}\varphi(\tau)}{\varphi(t)} \leq \frac{V(x', x'')}{\varphi(t)},$$

и

$$\|\mathcal{P}_t^{x'} - \mathcal{P}_t^{x''}\|_{TV} \leq 2 \frac{V(x', x'')}{\varphi(t)}. \quad (*)$$

Далее, если процесс $(X_t, t \geq 0)$ – эргодический, т.е. существует такая единственная инвариантная вероятностная мера \mathcal{P} на $(X, \sigma(X))$, что при любом начальном состоянии x распределение \mathcal{P}_t^x слабо сходится к \mathcal{P} , то интегрированием по инвариантной мере неравенства (*), получаем

$$\|\mathcal{P}_t^{x'} - \mathcal{P}_t^{x''}\|_{TV} \leq 2 \frac{\int V(x', x'') d\mathcal{P}(x'')}{\varphi(t)} = \frac{C(x')}{\varphi(t)}. \quad (**)$$

Однако вычисление оценки интеграла в (***) часто приводит к техническим трудностям.

Кроме того, при исследовании Марковских процессов в непрерывном времени, как правило, $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} < 1$.

Поэтому мы воспользуемся предложенным в [8] способом обойти эту трудность.

Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \sigma(\tilde{\Omega}), \tilde{\mathbf{P}})$ построена пара процессов $Z_t = (Z_t', Z_t'')$ такая, что

1. Для всех $t \geq 0$ выполнено $X_t' \stackrel{D}{=} Z_t'$ и $X_t'' \stackrel{D}{=} Z_t''$, т.е. для любых $A \in \sigma(\mathcal{X})$ и $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\{X_t' \in A\} = \mathbf{P}\{Z_t' \in A\} \text{ и } \mathbf{P}\{X_t'' \in A\} = \mathbf{P}\{Z_t'' \in A\}.$$

2. Для случайной величины $\tilde{\tau} = \inf\{t \geq 0 : Z_t' = Z_t''\}$ верно равенство

$$\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1.$$

Такой парный процесс $Z_t = (Z_t', Z_t'')$ называется успешной склейкой процессов X_t' и X_t'' .

Заметим, что мы не требуем здесь совпадения конечномерных распределений процессов X_t' и Z_t' , а также процессов X_t'' и Z_t'' ; более того, *эти процессы могут быть зависимыми.*

Теперь мы можем применить неравенство склеивания в следующей форме:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{P}_t^{x'}(A) - \mathcal{P}_t^{x''}(A) \right| &= \left| \mathbf{P}\{X_t' \in A\} - \mathbf{P}\{X_t'' \in A\} \right| = \\ &= \left| \mathbf{P}\{Z_t' \in A\} - \mathbf{P}\{Z_t'' \in A\} \right| \leq \mathbf{P}\{\tilde{\tau} > t\}, \end{aligned}$$

после чего оценивается $\mathbf{P}\{\tau > t\} = \mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x', x'') > t\} \leq V(x', x'')$ и производится интегрирование аналогично (**).

При применении метода склеивания к процессам в непрерывном времени часто используется *Основная лемма склеивания*; приведём её наиболее общую формулировку – см. [6], [9], [12].

Лемма. Пусть распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 , принимающих значения в R , абсолютно непрерывны по отношению к мере Λ , т.е. $\mathbf{P}\{\xi_i \in A\} = \int_A p_i(x) \Lambda(dx)$, и пусть $\int_A \min(p_1(x), p_2(x)) \Lambda(dx) = \chi > 0$.

Тогда на некотором вероятностном пространстве можно построить случайные величины ξ_i' такие, что $\xi_i' \stackrel{D}{=} \xi_i$; $\mathbf{P}\{\xi_1' = \xi_1''\} = \chi$.

Стационарное склеивание. Мы предлагаем при конструировании оценки скорости сходимости распределения Марковского процесса $(X_t, t \geq 0)$ к стационарному распределению использовать склеивание этого процесса и его *стационарной* версии $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$, т.е. случайного процесса с той же переходной функцией, но имеющего *стационарное начальное распределение*. Таким образом, мы избежим необходимости выполнять интегрирование по стационарному распределению, что может улучшить оценки скорости сходимости.

Процесс восстановления и его перескок. Напомним определение процесса восстановления. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – независимые неотрицательные случайные величины, причём случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$

имеют одинаковое распределение; обозначим $\theta_i = \sum_{j=0}^i \xi_j$.

Процесс $S_t = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}(\theta_i \leq t)$ называется процессом восстановления.

Если $\mathbf{P}\{\theta_0 = 0\} = 1$, то S_t – это процесс восстановления без запаздывания, в противном случае он называется запаздывающим процессом восстановления.

Перескоком процесса восстановления в момент времени t называется Марковский процесс $R_t = t - \theta_{S_t} = t - \max\{\theta_i : \theta_i \leq t\}$ (см. [2, 3]); при $\mathbf{E}\xi_1 > 0$ он с вероятностью 1 стремится к бесконечности, т.е. этот процесс не эргодичен.

Недоскоком процесса восстановления в момент времени t называется $N_t = \theta_{S_t+1} - t = \min\{\theta_i : \theta_i > t\} - t$.

Хорошо известно ([5]), что если $\mathbf{E}\xi_i < \infty$, и распределение случайной величины ξ_1 нерешётчато (носитель распределения случайной величины ξ_1 не является решётчатым, т.е. подмножеством множества вида $\{a + bn, b > 0, n \in \mathbb{N}\}$) то процесс R_t эргодичен, и

$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{R_t \leq x\} = \tilde{F}(x) = \frac{\int_0^x 1 - F(u) du}{\mathbf{E}\xi_1}$, где $F(u) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leq u\}$. Кроме того,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N_t < x\} = \tilde{F}(x)$. Заметим, что для любых распределений $F(x)$ почти

всюду существует $\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x)$, и $\tilde{F}'(x) = \int_0^x \tilde{f}(s)ds$, иначе говоря, предельное распределение перескока и недоскока абсолютно непрерывно.

Если распределение $F(u)$ имеет непрерывную компоненту, т.е.

$\int_{\{s:\exists F'(s)\}} F'(s)ds > 0$, то носитель распределения $F(u)$ содержится в носите

теле распределения $\tilde{F}(u)$, и поэтому

$$\int_{\{u:\exists F'(u)\}} \min(F'(u), \tilde{f}(u))du = \gamma_{\epsilon_0} > 0 .$$

Склеивание стационарного и нестационарного перескока. Теперь мы можем предложить конструкцию успешной склейки $Z_t = (Z_t, \tilde{Z}_t)$ процесса $(R_t, t \geq 0)$ с начальным состоянием $R_0 = a$ и его стационарной версии $(\tilde{R}_t, t \geq 0)$. Напомним, как конструируются независимые версии этих процессов.

Положим $\{\mathcal{U}_i, \mathcal{U}'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – множество независимых равномерно распределённых на отрезке $[0;1]$ случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\hat{\Omega}, \sigma(\hat{\Omega}), \hat{\mathbf{P}})$. Также обозначим

$F_a = \frac{F(x+a) - F(a)}{1 - F(a)}$ – это распределение недоскока при условии, что перескок равен a .

Предполагаем, что начальное состояние нестационарного перескока, т.е. процесса $(R_t, t \geq 0)$ равно a .

Положим $\zeta_0 = F_a^{-1}(\mathcal{U}_0)$ и $\zeta_i = F^{-1}(\mathcal{U}_i)$ для $i > 0$; $\mathcal{G}_i = \sum_{j=0}^i \zeta_j$;

тогда $Z_t = t - \max\{\mathcal{G}_i : \mathcal{G}_i \leq t\} = R_t$.

Положим $\tilde{\theta}_0 = \tilde{\zeta}_0 = \tilde{F}^{-1}(\mathcal{U}'_1)$ и $\tilde{\zeta}_i = F^{-1}(\mathcal{U}'_i)$ для $i > 0$; $\tilde{\mathcal{G}}_i = \sum_{j=0}^i \tilde{\zeta}_j$;

$\tilde{Z}_0 \stackrel{def}{=} F_{\tilde{\theta}_0}^{-1}(\mathcal{U}'_1)$; тогда

$$\tilde{Z}_i = \mathbf{1}(t < \tilde{\mathcal{G}}_0)(t + \tilde{Z}_0) + \mathbf{1}(t \geq \tilde{\mathcal{G}}_0)\left(t - \max\{\tilde{\mathcal{G}}_n : \tilde{\mathcal{G}}_n \leq t\}\right) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{R}_t.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{Z}_0 \leq s\} &= \int_0^\infty F_u(s) d\tilde{F}(u) = \int_0^\infty \frac{F(u+s) - F(u)}{1 - F(u)} \times \frac{1 - F(u)}{\mu} du = \\ &= \int_0^\infty \frac{(1 - F(u)) du}{\mu} = \tilde{F}(s). \end{aligned}$$

Теперь можно изменить эту конструкцию следующим образом. Сначала пара процессов Z_t и \tilde{Z}_t строится аналогично предложенной выше схеме – до первого момента, когда $Z_t = 0$. Теперь в этот момент и во все последующие моменты времени, когда $Z_t = 0$ – до тех пор, пока процессы Z_t и \tilde{Z}_t не склеятся – процесс \tilde{Z}_t *перезапускается* из стационарного распределения, причём здесь используется *Основная лемма склеивания* – таким образом, что с вероятностью \varkappa_0 процессы Z_t и \tilde{Z}_t склеиваются в момент следующего попадания процесса Z_t в ноль.

То есть момент склейки \tilde{t} не превосходит случайной суммы периодов восстановления процесса R_t , и количество слагаемых в этой сумме распределено геометрически. Это позволяет найти оценку моментов случайной величины \tilde{t} и, следовательно, оценить скорость сходимости распределения процесса R_t к стационарному распределению.

Предположим, что $\mathbf{E}(\xi_i)^K = M_{i,K} < \infty$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{E}}_i = \{Z_{\theta_i} = \tilde{Z}_{\theta_i}\}$. Тогда, используя неравенство Йенсена

для $k \geq 1$ и $a_i \leq 0$ в форме $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^k \leq n^{k-1} \sum_{i=1}^n a_i^k$, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\tilde{Z}_0 \leq s\} &= \int_0^\infty F_u(s) d\tilde{F}(u) = \\ &\leq \mathbf{E}\left(\mathbf{P}\left(\mathcal{E}_n \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{\mathcal{E}}_i\right) \sum_{n=1}^\infty \left((n+1)^{k-1} \left(\xi_0^k + \sum_{i=1}^n \xi_i^k\right) \mathbf{1}(\mathcal{E}_n) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}(\tilde{\mathcal{E}}_i)\right)\right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbf{E} \xi_0^k \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)^{k-1} (1-\alpha_0)^{n-1} \right) + \\ &+ \mathbf{E} \xi_1^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\alpha_0 n(n+2)^{k-1} + (n+1)^{k-1} \right) (1-\alpha_0)^{n-1} \right) = \\ &= C(a, k) [= \mathcal{C}(\xi_0, k)]. \end{aligned}$$

Отсюда, в соответствии с рассуждениями первой части этого текста, мы имеем

$$\left\| \mathcal{P}_t^a - \mathcal{P} \right\|_{TV} \leq \frac{2C(a, k)}{t^k} \text{ для всех } k \in [1, K]; \quad (***)$$

здесь \mathcal{P}_t^a – распределение процесса R_t с начальным состоянием a , а \mathcal{P} – стационарное распределение этого процесса.

Этот результат улучшает хорошо известный факт:

Если $\mathbf{E}(\xi_i)^K = M_{i,K} < \infty$, то для всех $k < K-1$ найдётся такое

$$c(k), \text{ что } \left\| \mathcal{P}_t^a - \mathcal{P} \right\|_{TV} \leq \frac{c(k)}{t^k} \text{ (см. [1, 11]).}$$

Результат (***) естественным образом переносится на регенерирующие процессы, что очень важно в приложениях теории массового обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Физматлит, 1972.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. М.: Наука, 1966, 1987.
3. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. М.: Наука, 1965.
4. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.: Физматлит, 1963.
5. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.
6. Butkovsky O.A. On asymptotics for Vasenstein coupling of Markov chains / O. A. Butkovsky, A. Yu. Veretennikov // Stochastic Processes and their Applications. 2013. V. 123(9). P. 3518-3541.
7. Doeblin, W. Exposé de la théorie des chaînes simple constantes de Markov à un nombre fini d'états // Rev. Math. Union Interbalcan 1938. V. 2 . P. 77–105.
8. Griffeath D. A maximal coupling for Markov chains // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1975. Volume 31, Issue 2. P. 95–106.
9. Kato K. Coupling Lemma and Its Application to The Security Analysis of Quantum Key Distribution // Tamagawa University Quantum ICT Research Institute Bulletin. 2015. V.4, No.1, P. 23-30.
10. Lindvall T. Lectures on the Coupling Method. Courier Corporation. 2002.
11. Thorisson H. Coupling, Stationarity, and Regeneration. Springer. 2000.
12. Veretennikov A. Coupling method for Markov chains under integral Doeblin type condition // Theory Stoch. Process. 2002. V. 8(24) , No. 3-4. P. 383-390.

УДК 517.91.51

С. С. Мамонов, А. О. Харламова

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru, a.harlamova@rsu.edu.ru

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Рассматривается система дифференциальных уравнений третьего порядка с цилиндрическим фазовым пространством. Получены условия существования предельного цикла первого рода.

Ключевые слова: предельные циклы, режимы синхронизации, неподвижная точка, оператор сдвига по траекториям.

S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru, a.harlamova@rsu.edu.ru

PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS WITH CYLINDRICAL PHASE SPACE

We considered a system of differential equations of the third order with a cylindrical phase space. We have obtained conditions for the existence of a limit cycle of the first kind.

Keywords: limit cycles, timing, fixed point, the shift operator along trajectories.

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, для которой с использованием принципа тора, метода нелокального сведения [3] и результатов работ [5-8], получены условия существования предельных циклов первого рода.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где $x, b, c, d \in \mathbb{R}^2$, $k, \tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma) - \Delta$ -периодическая, непрерывно дифференцируемая функция.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = \xi_2 > 0$, $l^T d = -\xi_1 < 0$,
 $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\text{rang}\|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k > 0$.

2) $\varphi(\sigma) - \Delta$ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma)$ – ограничена на сегменте $[0; \Delta]$.

3) Существует $r_1 > 0$ такое, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\frac{\nu y}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} - \varphi(\sigma) + \mu + \xi_2 \frac{2ky}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2\Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y \quad (2)$$

при $\mu = \mu_1 > r_1\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$, $f_1^-(-\bar{\sigma}_3) = f_1^-(\bar{\sigma}_2) = 0$, $-\bar{\sigma}_3 < 0$, $\bar{\sigma}_2 > 0$, $f_1^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2)$.

4) Система (2) при $\mu = \mu_1 > r_1\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^+(\sigma)$, $f_2^+(-\bar{\sigma}_5) = f_2^+(\bar{\sigma}_4) = 0$, $-\Delta + \sigma_2 < -\bar{\sigma}_5 < -\bar{\sigma}_3 < 0$, $\bar{\sigma}_4 > \bar{\sigma}_2 > 0$, $f_2^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4)$.

5) Существует $r_2 > 0$ такое, что система (2) при $\mu = -\mu_2 < -r_2\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$, $f_1^+(-\bar{\sigma}_1) = f_1^+(\bar{\sigma}_2) = 0$, $-\bar{\sigma}_3 < -\bar{\sigma}_1 < 0$, $f_1^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2)$.

6) Система (2) при $\mu = -\mu_2 < -r_2\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^-(\sigma)$, $f_2^-(-\bar{\sigma}_5) = f_2^-(\bar{\sigma}_6) = 0$, $\bar{\sigma}_4 < \bar{\sigma}_6 < \sigma_2$, $f_2^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_6)$.

7) Функции $f_1^+(\sigma)$, $f_2^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют неравенствам $f_1^+(\sigma) < f_2^+(\sigma)$ при $\sigma \in (-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2)$, $f_2^-(\sigma) < f_1^-(\sigma)$ при $\sigma \in (-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2)$.

8) Для любого $\sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]$ выполняется соотношение $(-r_2 - \Gamma\varphi(\sigma)) > 0$.

9) Справедливо неравенство $r_1 - \Gamma\varphi(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in [\bar{\sigma}_4; \bar{\sigma}_6]$.

10) Для функции

$$\psi_1(u) = u(\nu\Gamma^{-1}(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) - \beta_1) + \frac{2ku}{1 + \tau^2 u^2}(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1) + r_1(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1)$$

выполняется неравенство $\psi_1(u) < 0$ при $u \in [-u_1; u_2]$, где

$$\min_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_6]} \sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma) = -u_1, \quad \max_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4]} \sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma) = u_2.$$

11) Функция

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= u(\nu\Gamma^{-1}(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) - \beta_1) - r_2(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \\ &+ \frac{2ku}{1 + \tau^2 u^2} (\nu\Gamma^{-1} \xi_2 - \xi_1) \end{aligned}$$

удовлетворяет соотношению $\psi_2(u) > 0$ для любого $u \in [-u_1; u_2]$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} W_1(z) &= l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x - r_1, & W_2(z) &= l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x + r_2, & W_3(z) &= c^T x, \\ V_1^+(z) &= c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma), & V_1^-(z) &= c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma), & V_2^+(z) &= c^T x - \sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma), \\ V_2^-(z) &= c^T x - \sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma), & \text{где } z &= \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}, & r_1, r_2, f_1^+(\sigma), f_1^-(\sigma), f_2^+(\sigma), \end{aligned}$$

$f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3)-7) теоремы. Пусть

$$\begin{aligned} \partial Q_1 &= \{z : V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2]\}, \\ \partial Q_2 &= \{z : V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2]\}, \\ \partial Q_3 &= \{z : W_3(z) = c^T x = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]\}, \\ \partial Q &= \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3, \end{aligned}$$

тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности ∂Q вместе с поверхностью ∂Q через Q . Пусть

$$\begin{aligned} \partial D_1 &= \{z : V_2^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4]\}, \\ \partial D_2 &= \{z : V_2^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_6]\}, \\ \partial D_3 &= \{z : W_3(z) = c^T x = 0, \sigma \in [\bar{\sigma}_4; \bar{\sigma}_6]\}, \\ \partial D &= \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3, \end{aligned}$$

тогда ∂D является цилиндрической поверхностью. Обозначим внутренность цилиндрической поверхности ∂D вместе с поверхностью ∂D через D . В силу условия 7) теоремы множество $\Omega = Q \cap D \cap \{z : W_1(z) \leq 0\} \cap \{z : W_2(z) \geq 0\}$ является тороидальным, сечение его плоскостью $l^T x = 0$ изображено на рис. 1, а граница этого множества определяется равенством

$$\partial \Omega = \partial \Omega_1^+ \cup \partial \Omega_2^+ \cup \partial \Omega_3^+ \cup \partial \Omega_4^- \cup \partial \Omega_5^- \cup \partial \Omega_6^- \cup \partial \Omega_7^- \cup \partial \Omega_8^+,$$

где

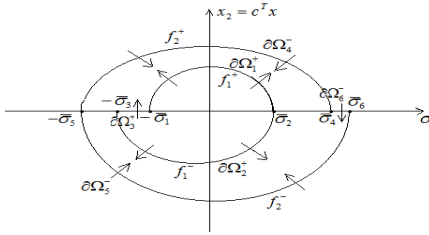


Рис. 1

$$L = \{z : W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\},$$

$$\partial\Omega_1^+ = \partial Q_1 \cap L, \partial\Omega_2^+ = \partial Q_2 \cap L,$$

$$\partial\Omega_3^+ = \partial Q_3 \cap L, \partial\Omega_4^- = \partial D_1 \cap L,$$

$$\partial\Omega_5^- = \partial D_2 \cap L, \partial\Omega_6^- = \partial D_3 \cap L,$$

$$\partial\Omega_7^- = Q \cap D \cap \{z : W_1(z) = 0\},$$

$$\partial\Omega_8^+ = Q \cap D \cap \{z : W_2(z) = 0\}.$$

Пусть $z \in \partial\Omega_1^+$, тогда справедливы соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma), \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2], \quad (3)$$

$$l^T x \geq -r_2 - \nu \Gamma^{-1} c^T x. \quad (4)$$

Используя (3), (4), условия 1), 5) теоремы найдём производную функции $V_1^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1^+$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^+(z) &= c^T A x + c^T b \varphi(\sigma) + c^T d \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \sqrt{\Gamma} \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} c^T x = l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) + \\ &+ \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \Gamma f_1^+(\sigma) \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} \geq -\nu \Gamma^{-\frac{1}{2}} f_1^+ - r_2 - \Gamma \varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2k\sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma (f_1^+(\sigma))^2} - \\ &- \Gamma f_1^+(\sigma) \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} = -r_2 - \mu \Gamma = -r_2 + \mu_2 \Gamma > -r_2 + r_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для $z \in \partial\Omega_2^+$, выполняются соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2], \quad (6)$$

$$l^T x \leq r_1 - \nu \Gamma^{-1} c^T x. \quad (7)$$

Найдём производную функции $V_1^-(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2^+$. Используя (6), (7), условия 1), 3) теоремы, получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^-(z) &= l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \Gamma f_1^-(\sigma) \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma} \leq -\nu \Gamma^{-\frac{1}{2}} f_1^- + r_1 - \Gamma \varphi(\sigma) + \\ &+ \xi_2 \frac{2k\sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma (f_1^-(\sigma))^2} - \Gamma \left(-\nu \Gamma^{-\frac{3}{2}} f_1^-(\sigma) - \varphi(\sigma) + \mu_1 + \xi_2 \frac{2k f_1^-(\sigma)}{\sqrt{\Gamma} (1 + \tau^2 \Gamma (f_1^-(\sigma))^2)} \right) = \\ &= r_1 - \mu_1 \Gamma < r_1 - r_1 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3^+$. Если $z \in \partial\Omega_3^+$, то справедливы неравенство (4) и равенство

$$c^T x = 0, \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]. \quad (9)$$

В силу условий 1), 8), теоремы и (4), (9) получим, что производная функции $W_3(z)$ в силу системы (1) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \dot{W}_3(z) &= l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) \geq -\mathfrak{I}^{-1} c^T x - r_2 - \Gamma \varphi(\sigma) = \\ &= -r_2 - \Gamma \varphi(\sigma) > 0 \quad \text{для любого } \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_4^-$, тогда справедливо (7) и соотношение

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma), \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4]. \quad (11)$$

Используя (7), (11) и условия 1), 4) теоремы, найдём производную функции $V_2^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_4^-$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2^+(z) &= l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \Gamma f_2^+(\sigma) \frac{df_2^+(\sigma)}{d\sigma} \leq -\mathfrak{I}^{-\frac{1}{2}} f_2^+(\sigma) + r_1 - \Gamma \varphi(\sigma) + \\ &+ \xi_2 \frac{2k\sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma (f_2^+(\sigma))^2} - \Gamma \left(-\mathfrak{I}^{-\frac{3}{2}} f_2^+(\sigma) - \varphi(\sigma) + \mu_1 + \xi_2 \frac{2kf_2^+(\sigma)}{\sqrt{\Gamma} (1 + \tau^2 \Gamma (f_2^+(\sigma))^2)} \right) = \\ &= r_1 - \mu_1 \Gamma < r_1 - r_1 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для $z \in \partial\Omega_5^-$ выполняется (4) и равенство

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_6]. \quad (13)$$

Найдём производную функции $V_2^-(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_5^-$, применяя (4), (13) и условия 1), 6) теоремы, получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_2^-(z) &\geq -\mathfrak{I}^{-\frac{1}{2}} f_2^-(\sigma) - r_2 - \Gamma \varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2k\sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma (f_2^-(\sigma))^2} - \Gamma \left(-\mathfrak{I}^{-\frac{3}{2}} f_2^-(\sigma) - \varphi(\sigma) - \right. \\ &\left. - \mu_2 + \xi_2 \frac{2kf_2^-(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma (f_2^-(\sigma))^2} \right) = -r_2 + \mu_2 \Gamma > -r_2 + r_2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_6^-$. Если $z \in \partial\Omega_6^-$, то справедливо (7) и равенство

$$c^T x = 0, \quad \sigma \in [\bar{\sigma}_4; \bar{\sigma}_6]. \quad (15)$$

С учётом условий 1), 9) теоремы и (7), (15) получим, что производная функции $W_3(z)$ в силу системы (1) удовлетворяет соотношению

$$\dot{W}_3(z) = l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) \leq -\mathcal{I}^{-1} c^T x + r_1 - \Gamma \varphi(\sigma) = r_1 - \Gamma \varphi(\sigma) < 0, \quad (16)$$

для любого $\sigma \in [\bar{\sigma}_4; \bar{\sigma}_6]$.

Пусть $z \in \partial\Omega_7^-$, $\min_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_6]} \sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma) = -u_1$, $\max_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4]} \sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma) = u_2$, $u = c^T x$. Тогда справедливы соотношения

$$l^T x = r_1 - \mathcal{I}^{-1} c^T x. \quad (17)$$

$$-u_1 \leq \sqrt{\Gamma} f_2^-(\sigma) \leq u \leq \sqrt{\Gamma} f_2^+(\sigma) \leq u_2. \quad (18)$$

Используя (17), (18) и условия 1), 10) теоремы, найдём производную функции $W_4(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_7^-$.

$$\begin{aligned} \dot{W}_4(z) &= -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x + \nu \varphi(\sigma) - \frac{2k\xi_1 c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + \mathcal{I}^{-1} l^T x - \nu \varphi(\sigma) + \mathcal{I}^{-1} \frac{2k\xi_2 c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = \\ &= l^T x (\mathcal{I}^{-1} - \alpha_1) - \beta_1 c^T x + (\mathcal{I}^{-1} \xi_2 - \xi_1) \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = -\mathcal{I}^{-1} (\mathcal{I}^{-1} - \alpha_1) c^T x + \\ &+ r_1 (\mathcal{I}^{-1} - \alpha_1) - \beta_1 c^T x + (\mathcal{I}^{-1} \xi_2 - \xi_1) \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = u (\mathcal{I}^{-1} (\alpha_1 - \mathcal{I}^{-1}) - \beta_1) + \\ &+ r_1 (\mathcal{I}^{-1} - \alpha_1) + (\mathcal{I}^{-1} \xi_2 - \xi_1) \frac{2ku}{1 + \tau^2 u^2} = \psi_1(u) < 0 \end{aligned}$$

для любого $u \in [-u_1; u_2]$. (19)

Для $z \in \partial\Omega_8^+$ выполняется (18) и равенство

$$l^T x = -r_2 - \mathcal{I}^{-1} c^T x. \quad (20)$$

Найдём производную функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_8^+$. Применяя (18), (20) и условия 1), 11) теоремы, получим

$$\dot{W}_2(z) = u (\mathcal{I}^{-1} (\alpha_1 - \mathcal{I}^{-1}) - \beta_1) - r_2 (\mathcal{I}^{-1} - \alpha_1) + \frac{2ku}{1 + \tau^2 u^2} (\mathcal{I}^{-1} \xi_2 - \xi_1) = \psi_2(u) > 0, \quad (21)$$

для любого $u \in [-u_1; u_2]$.

С учётом соотношений (5), (8), (10), (12), (14), (16), (19), (21) получим, что множество Ω является положительно инвариантным.

Рассмотрим функцию $Q_0(z) = \sigma$ и плоскость $P = \{z: Q_0(z) = 0\}$. Найдём пересечение множества Ω и плоскости P , обозначим получившиеся множества через D_1 и D_2 . Тогда $\Omega \cap P = D_1 \cup D_2$, где

$D_1 = \Omega \cap P \cap \{z: c^T x > 0\}$, $D_2 = \Omega \cap P \cap \{z: c^T x < 0\}$. Возьмем точку $z_0 \in D_1$ и определим T -оператор сдвига по траекториям системы (1). С использованием условий теоремы и результатов работы [3], показывается что $T(D_1) \subset D_1$, T - непрерывный оператор, D_1 - замкнутое, ограниченное, выпуклое множество. В силу теоремы Брауэра [4] существует неподвижная точка z^* оператора T такая, что $Tz^* = z^* \in D_1$. Неподвижная точка z^* определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1) имеет предельный цикл первого рода. Теорема доказана.

Для рассматриваемой системы разработан комплект программ, позволивший при параметрах $\alpha_1 = 1.25$, $\beta_1 = 0.0519$, $\xi_1 = 0.0344$, $\xi_2 = 0.8$, $\Gamma = 1$, $\nu = 0.043$, $\tau = 55.9$, $k = 0.0324$, $\gamma = 0.4$ определить в фазовом пространстве системы область, содержащую начальные условия предельного цикла первого рода. С помощью программного обеспечения на базе пакета Maple для системы с фиксированными параметрами проведен анализ её мультипликаторов.

Система (1) является математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ) [1-3], которая нашла своё широкое применение в теоретической радиотехнике и радиофизике. Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они позволяют использовать систему ЧФАПЧ как генератор модулированных колебаний, а также определять условия существования квазисинхронных режимов фазовых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шалфеев В.Д. К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. 1969. Т.12, № 7. С.1037-1051.
2. Шалфеев В.Д. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации / В.Д. Шалфеев, В.В. Матросов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
3. Леонов Г.А. Частотные методы в теории колебаний / Г.А. Леонов, И.М. Буркин, А.И. Шепелявый. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 368 с.
4. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
5. Мамонов С.С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестник Новосибирского гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т 11, вып. 1. С. 70-81.
6. Мамонов С.С. Влияние частотного кольца системы фазовой автоподстройки на условия существования циклов второго рода / С.С. Мамонов, А.О. Харламова // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 14, № 5. С. 55-60.
7. Мамонов С.С. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты / С.С. Мамонов, А.О. Харламова // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 15, № 3. С. 97-102.
8. Мамонов С.С. Квазисинхронные режимы фазовой системы / С.С. Мамонов, А.О. Харламова // Вестник Рязан. гос. радиотехн. ун-та. 2016. № 56. С. 45-51.

УДК 512.7

Л. Б. Медведева

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru

О МНОГООБРАЗИИ БИСЕКАНТ НОРМАЛЬНОЙ КРИВОЙ

Исследуется множество прямых n -мерного проективного пространства P^n , пересекающих нормальную рациональную кривую степени n в двух точках. Находятся элементарные числовые характеристики подмногообразия на грассманиане $G(2, n+1)$, точками которого параметризуется множество этих прямых.

Ключевые слова: Грассманиан, подмногообразие на грассманиане, бисеканта, цикл Шуберта, элементарные числовые характеристики.

L. B. Medvedeva

*Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru*

ABOUT THE VARIETY OF BISECANTES OF A NORMAL CURVE

The set of lines meeting the rational normal curve of degree n in two points in n -dimensional projective space is investigated. Also computation of elementary numerical invariants for a subvariety of the Grassmannian $G(2, n+1)$, parameterizing this set of lines, is done.

Keywords: Grassmannian, subvariety of the Grassmannian, bisecant, Schubert cycle, elementary numerical characteristics.

Нормальной рациональной кривой степени n в проективном пространстве P^n называется образ отображения Веронезе

$$(x_0 : x_1) \rightarrow (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : x_0^{n-2}x_1^2 : \dots : x_0x_1^{n-1} : x_1^n).$$

Будем ее обозначать символом C^n .

В данной заметке исследуется множество прямых, пересекающих заданную нормальную кривую $C^n \subset P^n$ в двух точках. Прямые, которые пересекают кривую C^n в двух точках, называются *бисекантами* кривой. Множество всех бисекант кривой C^n является подмногообразием на

грассманиане $G(2, n+1)$. Обозначим его символом K . Так как $\dim K = 2$, а $\dim G(2, n+1) = 2(n-1)$, то $\text{codim } K = 2(n-2)$.

Как известно, полная характеристика любого подмногообразия грассманиана, в том числе и исследуемого, дается элементарными числовыми характеристиками.

Согласно теореме о базисе на $G(2, n+1)$ многообразии K можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта той же коразмерности, что и K [1, с.119]:

$$K = \sum (K \cdot \sigma_{n-1-a_2, n-1-a_1}) \cdot \sigma_{a_1 a_2}, \text{ где } a_1 \leq n-1, \sum_{i=1}^2 a_i = 2(n-2). \quad (1)$$

Коэффициенты при циклах Шуберта $\sigma_{a_1 a_2}$ в этом разложении являются элементарными числовыми характеристиками многообразия K , которые и предстоит определить.

Выпишем все циклы Шуберта $\sigma_{a_1 a_2}$, удовлетворяющие условиям (1). Поскольку $a_1 \leq n-1, a_2 \leq n-1, a_1 \geq a_2$ и $a_1 + a_2 = 2(n-2)$, то возможны лишь два варианта: $\sigma_{n-1, n-3}$ и $\sigma_{n-2, n-2}$. Таким образом,

$$K = (K \cdot \sigma_{20}) \cdot \sigma_{n-1, n-3} + (K \cdot \sigma_{11}) \cdot \sigma_{n-2, n-2}.$$

Значит, элементарных числовых характеристик многообразия бисекант кривой C^n будет две: 1) $\delta_{20} = K \cdot \sigma_{20}$, 2) $\delta_{11} = K \cdot \sigma_{11}$.

Чтобы выяснить геометрический смысл этих характеристик, следует перейти от терминологии монографии [1] к терминологии книги [2].

Грассманиан $G(k+1, n+1)$ рассматривается в книге [2] как многообразии k -мерных плоскостей в P^n и обозначается символом $\Omega(k, n)$. Понятию цикла Шуберта $\sigma_{a_1 K a_{n+1}}$ на $G(k+1, n+1)$ соответствует понятие шубертова многообразия на $\Omega(k, n)$, которое обозначается символом Ω_{b_0, K, b_k} , и если $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ – невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, сумма которых равна коразмерности цикла, то (b_0, b_1, \dots, b_k) возрастающая последовательность таких чисел, не превосходящих n . Нетрудно показать, что зависимость между числами a_i и b_j определяется формулой $b_{i-1} = n - k + (i-1) - a_i$.

Поскольку $\sigma_{a_1, \dots, a_{k+1}} = \Omega_{b_0, \dots, b_k}$, где $b_{i-1} = n - k + (i-1) - a_i$, а в нашем случае $k=1$, то $b_0 = n-1+0-2 = n-3$, $b_1 = n-1+1-0 = n$. Таким образом, $\delta_{20} = K \cdot \Omega_{n-3, n}$ и $\delta_{11} = K \cdot \sigma_{11} = K \cdot \Omega_{n-2, n-1}$. Отсюда следует, что $\delta_{20} -$

число прямых из K , пересекающих $P^{n-3} \subset P^n$ в точке, а $\delta_{11} = K \cdot \sigma_{11} = K \cdot \Omega_{n-2, n-1}$ – число прямых из K , лежащих в гиперплоскости общего положения.

Для определения значений элементарных числовых характеристик применим принцип специализации, согласно которому нормальную кривую C^n можно заменить на n прямых, каждая из которых, начиная со второй, пересекает предыдущую, так что линейная оболочка всех прямых является пространством P^n . Понятно, что при распадении нормальной кривой C^n распадётся на компоненты и многообразие K . Полученное при специализации кривой C^n множество компонент многообразия K обозначим символом \tilde{K} . Сумма значений числовых характеристик компонент, составляющих многообразие \tilde{K} , равна, согласно принципу специализации, соответствующей элементарной характеристике многообразия K .

Каждая компонента специализации \tilde{K} многообразия K будет состоять из прямых пространства P^n , пересекающих любые две прямые из множества прямых, на которые распадается кривая C^n . Поэтому можно считать, что компонента определяется любой парой прямых, на которые распалась C^n , и значит, ее свойства зависят от взаимного расположения двух прямых.

Множество всех компонент специализации \tilde{K} можно разбить на группы, в которых составляющие не отличаются элементарными числовыми характеристиками. Компоненты, принадлежащие различным группам, имеют различные числовые характеристики.

Среди прямых, на которые распадается C^n , есть пары пересекающихся прямых и пары скрещивающихся прямых. Линейной оболочкой первых пар является плоскость, линейной оболочкой вторых пар прямых служит пространство $P^3 \subset P^4$. Отсюда следует, что существует всего две группы компонент многообразия \tilde{K} , в каждой из которых компоненты имеют одинаковые числовые характеристики.

Рассмотрим каждую из них.

1) Поскольку пар пересекающихся прямых, выбираемых из n прямых, на которые распадается кривая C^n , существует $(n-1)$ штук $((1,2), (2,3), (3,4), \dots, (n-1, n))$, то первая группа содержит $n-1$ компоненту. Обозначим символом K_1 одну из компонент первой группы. Очевидно, что K_1 является подмногообразием грассманиана $G(2,3)$. В теории шубертовых многообразий эта компонента записывается следующим образом: $K_1 = \Omega_{12}$.

2) Количество элементов во второй группе также несложно подсчитать. Выпишем символы пар скрещивающихся прямых, которые и представляют элементы этой группы:

$$\begin{array}{ccccccc} (1, 3) & & & & & & \\ (1, 4) & (2, 4) & & & & & \\ (1, 5) & (2, 5) & (3, 5) & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ (1, n-1) & (2, n-1) & (3, n-1) & \dots & (n-3, n-1) & & \\ (1, n) & (2, n) & (3, n) & \dots & (n-3, n) & (n-2, n) & \end{array}$$

Заметим, что количество элементов в этой группе равно сумме арифметической прогрессии, у которой первый член и разность равны по 1, а количество членов равно $n-2$. Итак, во второй группе число компонент

$$H = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}.$$

Компонента K_2 , представляющая эту группу, является подмногообразием грассманиана $G(2,4)$ и может быть записана следующим образом:

$$K_2 = \Omega_{13} \cdot \Omega_{13} = \Omega_{13}^2.$$

Для нахождения значений элементарных числовых характеристик компоненты K_i ($i=1,2$) ее нужно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта коразмерности, равной $\text{codim } K_i$.

Рассмотрим сначала многообразие $K_1 = \Omega_{12}$. Как уже отмечалось выше, компонента $K_1 \subset G(2,3)$ и $\dim K_1 = 2$. Так как $\dim G(2,3) = 2$, то $\text{codim } K_1 = 0$. Значит, согласно теореме о базисе, K_1 можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта коразмерности 0: $K_1 = (K_1 \cdot \sigma_{11}) \cdot \sigma_{00} = \delta_{11} \cdot \sigma_{00}$. Так как $K_1 = \Omega_{12} = \sigma_{00}$, то K_1 имеет следующие элементарные числовые характеристики: $\delta_{11} = 1$, $\delta_{20} = 0$.

Компонента K_2 является подмногообразием грассманиана $G(2,4)$. Так как $\dim K_2 = 2$ и $\dim G(2,4) = 4$, то $\text{codim } K_2 = 2$. Значит, K_2 можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта коразмерности 2:

$$K_2 = (K_2 \cdot \sigma_{20}) \cdot \sigma_{20} + (K_2 \cdot \sigma_{11}) \cdot \sigma_{11} = \delta_{20} \cdot \sigma_{20} + \delta_{11} \cdot \sigma_{11}.$$

Вспомним, что $K_2 = \Omega_{13}^2 = \sigma_{10}^2 = \sigma_{10} \cdot \sigma_{10}$. Это пересечение можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта, используя формулу Пиери:

Если $a = (a, 0, \dots, 0)$, то для любой последовательности $b = (b_1, \dots, b_k)$

$$(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \sum \sigma_c, \text{ где } b_i \leq c_i \leq b_{i-1} \text{ и } \sum c_i = a + \sum b_i.$$

В нашем случае $a = (1, 0)$, $b = (1, 0)$. Поэтому

$$1 \leq c_1 \leq 2, \quad 0 \leq c_2 \leq 1, \quad \sum_{i=1}^2 c_i = 2, \quad K_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_{10} = \sigma_{20} + \sigma_{11}.$$

Сравнивая данное представление с разложением по базису, видим, что $\delta_{11} = 1$, $\delta_{20} = 1$.

Теперь, когда найдены элементарные числовые характеристики компонент из каждой группы специализации \tilde{K} и количество компонент в каждой группе, можно найти обе числовые характеристики многообразия K бисекант кривой C^n . Результаты подсчётов приведены в таблице.

	Количество элементов в группе	δ_{20}	δ_{11}
K_1	$n-1$	0	1
K_2	$\frac{1}{2}(n-1) \cdot (n-2)$	1	1
K		$\frac{1}{2}(n-1) \cdot (n-2)$	$\frac{1}{2}(n-1) \cdot n$

Итак, число бисекант кривой C^n , пересекающих $(n-3)$ -плоскость в \mathbb{P}^n , равно $(n-1) \cdot (n-2) / 2$, а число бисекант, лежащих в гиперплоскости общего положения относительно C^n , равно $n(n-1) / 2$.

Заметим, что вторую характеристику δ_{11} можно было бы получить из чисто геометрических соображений с привлечением комбинаторики. А именно, всякая гиперплоскость общего положения пересекает C^n в n точках. Тогда различных пар прямых, определяемых этими точками будет $n(n-1) / 2$.

Метод подсчета элементарных характеристик, примененный для многообразия бисекант нормальной кривой пространства \mathbb{P}^n , может быть использован для изучения любого многообразия k -мерных плоскостей, пересекающих C^n в определенном числе точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриффитс Ф. Принципы алгебраической геометрии / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. М.: Мир. 1982. Т.1.
2. Ходж В. Методы алгебраической геометрии / В. Ходж, Д. Пидо. М.: ИЛ, 1954. Т. 2.
3. Харрис. Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс. М.: МЦНМО, 2005. 400 с

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О БИФУРКАЦИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ,
ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ СТЫКА ЛИНИЙ РАЗРЫВА
ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ**

Описаны бифуркации кусочно-гладкого векторного поля коразмерности два в окрестности его периодической траектории, проходящей через точку стыка линий разрыва поля.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, периодическая траектория, бифуркационная диаграмма.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON BIFURCATIONS OF A PERIODIC TRAJECTORY,
PASSING THROUGH A JUNCTION POINT OF LINES
OF DISCONTINUITY OF A VECTOR FIELD**

We describe bifurcations of a piecewise smooth vector field of codimension two in the neighborhood of its periodic trajectory, passing through a junction point of lines of discontinuity of a vector field.

Keywords: piecewise smooth vector field, periodic trajectory, bifurcation diagram.

Динамические системы, задаваемые кусочно-гладкими векторными полями, используются в качестве математических моделей в задачах автоматического управления, в механических системах с сухим трением, в некоторых биологических и экономических задачах. Бифуркаций таких систем изучались в ряде работ, например, в книгах [1, 2], а также в статьях автора [3-12]. В данной статье описываются бифуркации кусочно-гладкого векторного поля на плоскости в окрестности периодической траектории, проходящей через точку «стыка» линий разрыва поля и не содержащей особых точек.

Замкнутое подмножество $N \subset \mathbb{R}^2$ является C^k – многообразием с углами, если для каждой точки x^0 его границы ∂N существует такие ок-

рестность U и C^k – диффеоморфизм $h:U \rightarrow \mathbb{R}^2$, что либо $h(U \cap N) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ (x^0 – 1-угловая точка), либо $h(U \cap N) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ (x^0 – 2-угловая точка).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ – компактное C^{r+1} – многообразие с углами ($r \geq 1$), $D = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ – разбиение M на компактные C^{r+1} – многообразия с углами, пересекающимися между собой только по границам: $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$, $M_j \cap M_k = \partial M_j \cap \partial M_k$ при $j \neq k$. Кусочно-гладким векторным полем класса C^r на многообразии M с разбиением D назовем элемент банахова пространства

$$X^r(M, D) := X^r(M_1) \oplus \dots \oplus X^r(M_n),$$

где $X^r(M_i)$ – банахово пространство векторных полей класса C^r на M_i с C^r -нормой. Траекториями кусочно-гладкого векторного поля $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in X^r(M, D)$ следуя [1, с. 95] будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{X}(x)$, $x \in M$, где $\hat{X}(x) = \{X_i(x)\}$ при $x \in \text{int } M_i$ и $\hat{X}(x)$ – выпуклая оболочка векторов $X_{i_1}(x), \dots, X_{i_k}(x)$ при $x \in M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}$.

Из [13, с. 587–597] следует, что векторные поля $X_i \in X^r(M_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, можно продолжить до векторных полей $\bar{X}_i \in X^r(M)$ так, чтобы отображения $X_i \rightarrow \bar{X}_i$ были ограниченными линейными операторами $J_i : X^r(M_i) \rightarrow X^r(M)$.

Пусть $Y \in X^r(M)$. Тогда $Y(x) = P_1(x_1, x_2, Y) \frac{\partial}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, Y) \frac{\partial}{\partial x_2}$, где P_1 и P_2 – C^r -функции на $M \times X^r(M)$. При $Y = \bar{X}_i = J_i(X_i)$ получаем, что

$$\bar{X}_i(x) = P_1^{(i)}(x_1, x_2, X) \partial / \partial x_1 + P_2^{(i)}(x_1, x_2, X) \partial / \partial x_2, \quad (1)$$

где $P_j^{(i)}(x_1, x_2, X) = P_j(x_1, x_2, J_i(X_i))$ – C^r -функции на $M \times X^r(M)$.

Предположим, что векторное поле $X^0 \in X^r(M, D)$ имеет периодическую (замкнутую) траекторию Γ_0 , содержащую единственную 2-угловую точку x^0 и не проходящую через особые точки (в смысле определения из [1, с.155]). Пусть M_k , $k = 1, \dots, m$, – подмногообразия M_i , содержащие

точку x^0 , пронумерованные в циклическом порядке, $\ell_j : [0,1) \rightarrow M$ $j = 1, \dots, m+1$ – такие C^{r+1} -вложения, что $\ell_{m+1} = \ell_1$, при $k = 1, \dots, m$ $\ell_k(0) = x^0$, $L_k = \ell_k[0,1) \subset \partial M_{i_k}$, $\ell_{k+1}[0,1) \subset \partial M_{i_k}$.

Пусть Γ_0 задается уравнением $x = \xi(t)$, $\xi(0) = x^0$. Так как x^0 не является особой точкой, то можно считать, что нумерация M_{i_k} выбрана так, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\xi[-\varepsilon, 0) \subset \text{int } M_{i_1}$, $\xi(0, \varepsilon) \subset \text{int } M_\omega$ при некотором $\omega \in \{2, \dots, m\}$, а реперы $(\ell'_k(0), X_{i_k}(x^0))$ имеют положительную ориентацию при $k = 2, \dots, \omega$ и отрицательную ориентацию при $k = \omega + 1, \dots, m, 1$ (рис. 1).

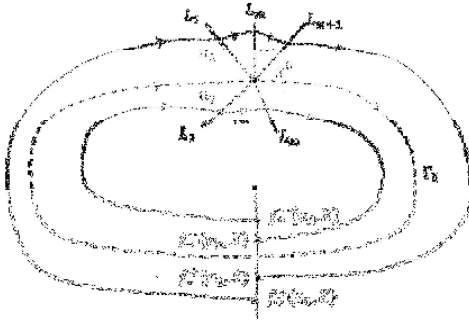


Рис. 1

Определим отображение $\eta_1 : (-1,1) \rightarrow \partial M_1$, положив $\eta_1(u) = \ell_1(u)$ при $u \in [0,1)$ и $\eta_1(u) = \ell_2(-u)$ при $u \in (-1,0]$. Пусть $\eta_2 : (-1,1) \rightarrow \text{int } M_\omega$ – такое C^{r+1} -вложение, что дуга $\eta_2(-1,1)$ пересекает Γ_0 в единственной точке $\eta_2(0) = \xi(\varepsilon)$, это пересечение трансверсальное и репер $(X_\omega(\eta_2(0)), \eta'_2(0))$ имеет положительную ориентацию.

Из положительной ориентации реперов $(\ell'_k(0), X_{i_k}(x^0))$ при $k = 2, \dots, \omega$, из (1) и [14, с. 155] следует, что существует окрестность V' поля X^0 и число $u' > 0$ такие, что для поля $X = (X_1, \dots, X_n) \in V'$ положительная полутраектория поля X_{i_k} , начинающаяся в точке $\ell_k(u)$, $k = 2, \dots, \omega - 1$, $(\ell_\omega(u))$, $u \in [0, u')$, пересекает дугу L_{k+1} ($\eta_2(-1,0]$) в точке $\ell_{k+1}(\chi_k(u, X))$ ($\eta_2(-\chi_\omega(u, X))$), где χ_k (χ_ω) – C^r -функции, $\chi_k(0, X) = 0$,

$\chi_\omega(0, X^0) = 0$. Тогда для некоторой окрестности $V_1 \subset V'$ поля X^0 и некоторого числа $u_1 > 0$ будет определено отображение по траекториям поля $X \in V_1$: $\eta_1(u) \mapsto \eta_2(f_+^-(u, X))$, $u \in (-u_1, 0]$, где $f_+^-(u, X) = \chi_\omega(\chi_k(\dots(\chi_2(-u, X), \dots, X), X)$. При этом, $f_+^-(u, X)$ – C^r -функция, $(f_+^-)'_u(u, X) > 0$, $f_+^-(0, X_0) = 0$. Взяв V_1 и u_1 достаточно малыми, получим аналогичное отображение $\eta_1(u) \mapsto \eta_2(f_+^+(u, X))$, $u \in [0, u_1]$, где $f_+^-(u, X)$ – C^r -функция, $(f_+^+)'_u(u, X) > 0$, $f_+^+(0, X) = f_+^-(0, X)$. При необходимости еще уменьшив V_1 и u_1 , получим так же отображения по траекториям поля $-X$: $\eta_1(u) \mapsto \eta_2(f_-^-(u, X))$, $u \in (-u_1, 0]$, и $\eta_1(u) \mapsto \eta_2(f_-^+(u, X))$, $u \in [0, u_1]$, $X \in V_1$, где $f_-^\pm(u, X)$ – C^r -функции, $(f_-^\pm)'_u(u, X) > 0$, $f_-^+(0, X) = f_-^-(0, X)$, $f_-^\pm(0, X^0) = 0$. Положим $f_\pm(u, X) := f_\pm^+(u, X)$ при $u \in [0, u_1]$ и $f_\pm(u, X) := f_\pm^-(u, X)$ при $u \in (-u_1, 0]$, $d(u, X) := f_+(u, X) - f_-(u, X)$. Ясно, что нулям функции расхождения $d(\cdot, X)$ соответствуют периодические траектории поля X .

Если производные $d'_u(+0, X^0)$ и $d'_u(-0, X^0)$ отрицательны (положительны), то Γ_0 – устойчивая (неустойчивая) грубая замкнутая траектория [1, с. 162]. Если $d'_u(+0, X^0) \cdot d'_u(-0, X^0) < 0$, то Γ_0 – негрубая замкнутая траектория – *шитый двойной цикл*. Поведение траекторий в окрестности шитого двойного цикла аналогично поведению траекторий гладкого векторного поля в окрестности двойного цикла. Бифуркации шитого двойного цикла описаны в [3].

Пусть $d'_u(-0, X^0) \neq 0$, $d'_u(+0, X^0) = 0$, $d''_{uu}(+0, X^0) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать

$$d'_u(-0, X^0) < 0 \text{ или } d'_u(-0, X^0) > 0, \quad d'_u(+0, X^0) = 0, \quad d''_{uu}(+0, X^0) > 0. \quad (2)$$

Если $d''_{uu}(+0, X^0) < 0$, то, заменив поле X^0 на противоположное, также придем к (2).

Определим C^{r-1} -отображение $g: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, положив $g(X) := (d(0, X), d'_u(+0, X))$. Нетрудно убедиться, что производная $g'(X^0): X'(M, D) \rightarrow \mathbb{R}^2$ является сюръективным отображением. Поэтому существует окрестность $V_0 \subset V_1$ поля X^0 , окрестность нуля Z_0 в банаховом пространстве $\ker g'(X^0)$, число $\delta_0 > 0$ и C^{r-1} -диффеоморфизм

$\varphi: (-\delta_0, \delta_0)^2 \times Z_0 \rightarrow V_0$ такие, что $g(\varphi((\varepsilon_1, \varepsilon_2), z)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для любых $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) \equiv ((\varepsilon_1, \varepsilon_2), z) \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \times Z_0$ [15]. Мы можем также считать, что окрестность Z_0 выбрана столь малой, что условие (2) выполняется при замене поля X^0 на любое поле $X \in \varphi(\{0\} \times Z_0)$. Таким образом, множество векторных полей, принадлежащих некоторой окрестности поля X^0 , имеющих периодическую траекторию без особых точек, проходящую через угловую точку x^0 , и удовлетворяющих условиям (2), является вложенным C^{r-1} -подмногообразием $X^r(M, D)$ коразмерности два.

Обозначим \tilde{d} ограничение функции d на $[0, u_1] \times V_0$: $\tilde{d}(u, X) = f_+^+(u, X) - f_-^+(u, X)$. Ясно, что $\tilde{d} \in C^r$ и можно считать u_1, δ_0 и Z_0 столь малыми, что при некотором $C > 0$ для всех $u \in [0, u_1]$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \times Z_0$, $k = 1, 2$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial u \partial \varepsilon_k} \tilde{d}(u, \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)) \right| \leq C. \quad (3)$$

Теорема 1. Если в условии (2) $d'_u(-0, X^0) < 0$, то окрестность U цикла Γ_0 и окрестность $V = \varphi((-\delta, \delta)^2 \times Z)$, $0 < \delta < \delta_0$, $Z \subset Z_0$, поля X^0 можно выбрать так, что

1) окрестность U ограничена двумя замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Γ_+ и Γ_- , причем траектории векторных полей $X \in V$ в точках Γ_+ входят в U , а в точках Γ_- выходят из U ;

2) векторные поля $X \in V$ не имеют в U особых точек;

3) $V = E_1 \cup E_2 \cup B_0 \cup B_1 \cup B_2$, где (рис. 2)

$$B_0 = \varphi(\{0\} \times Z), \quad B_1 = \varphi(\{0\} \times (0, \delta) \times Z), \quad B_2 = \{\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) : \varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, z)\},$$

$$\gamma \in C^{r-1}((-\delta, 0) \times Z, (0, \delta)), \quad \gamma(-0, z) = \gamma'_{\varepsilon_2}(-0, z) = 0,$$

$$E_1 = \{\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) : 0 \leq \varepsilon_2 < \delta, 0 < \varepsilon_1 < \delta \vee -\delta < \varepsilon_2 < 0, \gamma(\varepsilon_2, z) < \varepsilon_1 < \delta\},$$

$$E_2 = \{\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) : 0 \leq \varepsilon_2 < \delta, -\delta < \varepsilon_1 < 0 \vee -\delta < \varepsilon_2 < 0, -\delta < \varepsilon_1 < \gamma(\varepsilon_2, z)\};$$

векторные поля из E_1 (E_2) грубые в U и не имеют в U периодических траекторий (имеют две периодические траектории – устойчивую и неустойчивую); векторные поля $X \in B_0 \cup B_1 \cup B_2$ имеют в U единственную периодическую траекторию – двойной цикл при $X \in B_2$ и сшитый двойной цикл при $X \in B_1$.

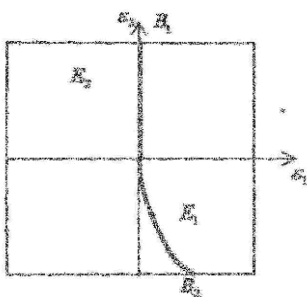


Рис. 2

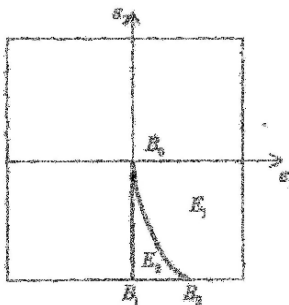


Рис. 3

Доказательство. В силу (2) мы можем считать, что при некоторых $u_* > 0$, $V = \varphi((-\delta, \delta)^2 \times Z)$, $0 < \delta < \delta_0$, $Z \subset Z_0$

$$d'_u(u, X) < 0 \quad \text{для } u \in (-u_*, 0), X \in V; \quad (4)$$

$$0 < 0.9 d''_{uu}(+0, X^0) \leq \tilde{d}''_{uu}(u, X) \leq 1.1 d''_{uu}(+0, X^0) \quad \text{для } u \in [0, u_*), X \in V; \quad (5)$$

$$d(\pm u_*, X) > 0, d'_u(u_*, X) > 0 \quad \text{для } X \in V. \quad (6)$$

Ввиду (6) нетрудно построить окрестность U цикла Γ_0 , удовлетворяющую условию 1) для векторных полей из окрестности V , если считать ее выбранной достаточно малой. Пусть $X = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)$. Тогда

$$d(0, X) = \varepsilon_1, \tilde{d}'_u(0, X) = \varepsilon_2. \quad (7)$$

Из равенства

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \tilde{d}(u, X) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \tilde{d}(0, X) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial \varepsilon_1} \tilde{d}(c, X) u = 1 + \frac{\partial^2}{\partial u \partial \varepsilon_1} \tilde{d}(c, X) u, \quad (8)$$

где $c \in (0, u)$, и из (3) следует, что u_* и V можно считать выбранными столь малыми, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} d(u, X) > 1/2 \quad \text{для всех } u \in (0, u_*). \quad (9)$$

Предположим, что $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$. Ввиду (5) – (7) существует такая точка $a(X) \in (0, u_*)$, что $a(\cdot) \in C^r$ и

$$\operatorname{sgn} d'_u(u, X) = \operatorname{sgn}(u - a(X)). \quad (10)$$

Обозначим $\mu(X) := d(a(X), X)$. Вследствие (10) и (9)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \mu(X) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} d(u, X) \Big|_{u=a(X)} > \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Ввиду (10)

$$\mu(X) < d(0, X) = 0 \quad \text{для} \quad X = \varphi(0, \varepsilon_2, z). \quad (12)$$

По формуле Тейлора

$$d(0, X) = d(a(X), X) - d'_u(a(X), X) a(X) + \frac{1}{2} d''_{uu}(c_1, X) a^2(X),$$

где $c_1 \in (0, u_*)$. Используя (7) и (10), отсюда получаем

$$\mu(X) = \varepsilon_1 - \frac{1}{2} d''_{uu}(c_1, X) a^2(X). \quad (13)$$

По формуле Лагранжа $d'_u(+0, X) = d'_u(a(X), X) - d''_{uu}(c_2, X) a(X)$, где $c_2 \in (0, u_*)$, откуда и из (7) и (10) находим

$$a(X) = -\varepsilon_2 / d''_{uu}(c_2, X). \quad (14)$$

Подставляя это выражение в (13), получаем

$$\mu(X) = \varepsilon_1 - \frac{d''_{uu}(c_1, X)}{2d''_{uu}(c_2, X)} \varepsilon_2^2. \quad (15)$$

Из (15) и (5), считая δ достаточно малым, имеем

$$\mu(X) > 0 \quad \text{для} \quad X = \varphi(-\varepsilon_2, \varepsilon_2, z). \quad (16)$$

Из неравенств (11), (12) и (16) следует, что для любых $(\varepsilon_2, z) \in (-\delta, 0) \times Z$ существует число

$$\gamma(\varepsilon_2, z) \in (0, -\varepsilon_2), \quad (17)$$

такое, что

$$\operatorname{sgn} \mu(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \gamma(\varepsilon_2, z)) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon_1 \in (0, \delta), \quad \varepsilon_2 \in (-\delta, 0). \quad (18)$$

Из (17) получаем, что $\gamma(-0, z) = 0$. Из теоремы о неявной функции следует, что $\gamma \in C^{r-1}((-\delta, 0) \times Z, (0, \delta))$ и

$$\gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2, z) = - \frac{\partial \mu(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)) / \partial \varepsilon_2}{\partial \mu(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)) / \partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, z)}. \quad (19)$$

Аналогично (8) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \mu(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(u, X) \Big|_{u = a(X), X = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial \varepsilon_2} \tilde{d}(\bar{c}, X) a(X) \Big|_{X = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\bar{c} \in (0, u_*)$. Из (20), (3), (14) и (5) следует, что

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \mu(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)) \Big|_{\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, z)} = 0. \quad (21)$$

Из (19), (17), (21) и (11) вытекает, что $\gamma'_{\varepsilon_2}(-0, z) = 0$.

Из (4), (6), (7) и (18) получаем, что при $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, z)$, $0 < \varepsilon_1 < \gamma(\varepsilon_2, z)$ и $\gamma(\varepsilon_2, z) < \varepsilon_1 < \delta$ функция $d(\cdot, \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z))$ на $(-u_*, u_*)$, соответственно, имеет единственный (двукратный) нуль, имеет два простых нуля и не имеет нулей, а поле $X = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z)$ в U , соответственно, имеет единственную периодическую траекторию – двойной цикл, имеет две гиперболические периодические траектории и не имеет периодических траекторий.

Доказательство того, что траектории в окрестности U при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2 \setminus (0, \delta) \times (-\delta, 0)$ такие, как описано в теореме, несложно и мы его опустим.

Замечание. Все векторные поля из $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2$ топологически эквивалентны; аналогично равенству $\gamma'_{\varepsilon_2}(-0, z) = 0$ можно доказать, что $\gamma'_z(-0, z) = 0$, и потому B образует C^1 -подмногообразие коразмерности один в $X^r(M, D)$. Однако оно не образует C^2 -подмногообразия при любом r , поскольку $\gamma''_{\varepsilon_2, \varepsilon_2}(-0, 0) \neq 0$.

Теорема 2. Если в условии (2) $d'_u(-0, X^0) > 0$, то окрестность U цикла Γ_0 и окрестность $V = \varphi((-\delta, \delta)^2 \times Z)$, $0 < \delta < \delta_0$, $Z \subset Z_0$, поля X^0 можно выбрать так, что

1) окрестность U ограничена двумя замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Γ_+ и Γ_- , в точках которых траектории векторных полей $X \in V$ выходят из U ;

2) векторные поля $X \in V$ не имеют в U особых точек;

3) $V = E_1 \cup E_2 \cup B_0 \cup B_1 \cup B_2$, где (рис.3)

$$B_0 = \varphi(\{0\} \times Z), B_1 = \varphi(\{0\} \times (-\delta, 0) \times Z), B_2 = \{\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) : \varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, z)\},$$

$$\gamma \in C^{r-1}((-\delta, 0) \times Z, (0, \delta)), \gamma(-0, z) = \gamma'_{\varepsilon_2}(-0, z) = 0,$$

$$E_2 = \{\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, z) : -\delta < \varepsilon_2 < 0, 0 < \varepsilon_1 < \gamma(\varepsilon_2, z)\},$$

$$E_1 = V \setminus (B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup E_2);$$

векторные поля из E_1 (E_2) грубые в U и имеют в U одну неустойчивую периодическую траекторию (три периодические траектории – две неустойчивых и устойчивую); векторные поля $X \in B_0$ имеют в U одну периодическую траекторию; векторные поля $X \in B_1$ ($X \in B_2$) имеют в U две периодических траектории, одна из которых – грубая неустойчивая, а другая – сшитый двойной цикл (двойной цикл).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филитов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. *di Bernardo M.* Piecewise smooth dynamical systems / M. di Bernardo, Ch. J. Budd, A.R. Carneys, P. Kowalczyk // *Appl. Math. Sci.* V. 163. London: Springer, 2008. 483 p.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях сшитого двойного цикла // Математика и физика, астрономия и экономика и совершенствование их преподавания: материалы междунар. конф. "Чтения Ушинского". Ч.1 . Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012. С.12-15.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении устойчивой замкнутой траектории из гомоклинической траектории седла кусочно-гладкого векторного поля // *Яросл. пед. вестник.* 2013. Т. III (естественные науки) № 4. С. 44-49.
5. *Ройтенберг В.Ш.* Об одной бифуркации трехмерных кусочно-гладких векторных полей // *Вестник Адыгейского гос. ун-та.* Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2014. № 1 (133). С. 16-23.
6. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и сшитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля // *Вестник Костромского гос. ун-та им. Н.А. Некрасова.* 2014. Т. 20, № 2. С. 26-30.
7. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях сшитого тройного цикла // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. С. 54-67.
8. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях сепаратрисного контура кусочно-гладкого векторного поля // *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ:* сб. тр. XXVII Междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 1. Тамбов: Тамбов. гос. техн. ун-т, 2014. С. 14-16.
9. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях сшитого фокуса // *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ:* сб. трудов XXVIII Междунар. науч. конф. В 12 т. Т. 1. Саратов: Изд-во СГТУ, 2015. С. 27-31.
10. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении периодических траекторий из особой точки кусочно-гладкого векторного поля // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.* 2015. № 7-1. С. 11-16.
11. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодической траектории с односторонним касанием линии разрыва векторного поля // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.* 2016. № 2-1. С. 37-45.
12. *Ройтенберг В.Ш.* О рождении периодической траектории из точки пересечения линий разрыва векторного поля // *Вестник Адыгейского гос. ун-та.* Сер. «Естественно-математические и технические науки». 2016. № 2 (181). С. 34-38.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962. 607 с.
14. *Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер.* М.: Наука, 1966. 568 с.
15. *Ройтенберг В.Ш.* О разбиении пространства векторных полей в окрестности негрубого векторного поля коразмерности два // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 2. Ярославль. Изд-во ЯГТУ, 2001. С. 40-44.

УДК 517.925.52+517.926

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О БИФУРКАЦИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ
ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений в проективном пространстве, являющиеся продолжением линейных неоднородных периодических систем дифференциальных уравнений. Показано, что в типичном случае исчезновение периодической траектории линейной системы происходит при бифуркации бесконечно удаленной периодической траектории.

Ключевые слова: линейные периодические системы дифференциальных уравнений, проективное пространство, периодическая траектория, бифуркации.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON BIFURCATIONS OF PERIODIC ORBITS
OF LINEAR NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL
SYSTEMS WITH PERIODIC COEFFICIENTS**

The paper examines systems of differential equations on the projective space which are the extension of linear non-homogeneous periodic systems of differential equations. We prove that in generic case the disappearance of a periodic orbit take place under the bifurcation of an infinite fare periodic orbit.

Keywords: linear periodic systems of differential equations, projective space, periodic orbit, bifurcations.

В работе [1] структура фазовых портретов линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами изучалась в проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$. Системы n линейных неоднородных дифференциальных уравнений с ω -периодическими коэффициентами также естественно рассматривать не только в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$, но и на его компактификации $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. Такой подход дал возможность

описать в настоящей работе типичную бифуркацию, в которой из пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ «исчезает» периодическая траектория.

1. Линейные периодические системы в \mathbb{R}^n и их продолжения на \mathbb{RP}^n .

В пространстве \mathbb{R}^n рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (линейную систему)

$$\ell : \dot{x} = A(t)x + b(t),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(t)$ – квадратная матрица n -го порядка, с элементами $a_{ij}(t)$, непрерывно и ω -периодически зависящими от $t \in \mathbb{R}$, $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$ непрерывно и ω -периодически зависит от $t \in \mathbb{R}$. Система ℓ естественно отождествляется с функцией

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2+n},$$

а множество LS_ω^n всех таких систем с банаховым пространством всех непрерывных ω -периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2+n}$ с равномерной нормой: $\|\ell\| := \max_{i,j} \max_t \max\{|a_{ij}(t)|, |b_i(t)|\}$. Под *траекториями системы ℓ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$* будем понимать траектории автономной системы $\dot{x} = A(s)x + b(s)$, $\dot{s} = 1$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$.

Будем рассматривать \mathbb{R}^n как аффинную часть проективного пространства \mathbb{RP}^n . Система $\ell : \dot{x} = A(s)x + b(s)$, $\dot{s} = 1$ единственным образом продолжается до автономной системы $\bar{\ell}$ на фазовом пространстве $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ [1, 2]. Ее траектории будем называть *траекториями системы ℓ в $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$* . Множество $E := (\mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} \cong \mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ состоит из траекторий.

Отображения значений

$$\mathbb{R} \times LS_\omega^n \ni (t, \ell) \mapsto A(t) \text{ и } \mathbb{R} \times LS_\omega^n \ni (t, \ell) \mapsto b(t)$$

непрерывны. Кроме того, они линейны, а потому и бесконечно дифференцируемы как функции от ℓ . Следовательно, нормированная фундаментальная матрица $X(t, \ell)$ системы ℓ – гладкая функция от ℓ . Как обычно, мультипликаторами системы называются собственные значения матрицы монодромии $X(\omega) = X(\omega, \ell)$.

2. Формулировки результатов. Отображение $P_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ последования по траекториям ℓ сечения $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ имеет вид

$$x \mapsto X(\omega)x + a, \text{ где } a = X(\omega) \int_0^\omega X^{-1}(t)b(t)dt. \text{ Если } 1 \text{ не является мультип-}$$

ликатором, то $\det(X(\omega) - I) \neq 0$ и P_ℓ имеет единственную неподвижную точку, а ℓ – единственную периодическую траекторию в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. Таким образом, если система $\ell \in \text{LS}_\omega^n$ не имеет периодических траекторий в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$, то она имеет мультипликатор равный 1.

Теорема 1. *Множество систем $\ell \in \text{LS}_\omega^n$, не имеющих периодических траекторий в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$, нигде не плотно в LS_ω^n .*

Обозначим B_m , $m = 0, 1, \dots, n-1$, множество линейных систем $\ell_0 \in \text{LS}_\omega^n$ удовлетворяющих следующим условиям: 1) они имеют n различных действительных мультипликаторов μ_1^0, \dots, μ_n^0 , причем $|\mu_i^0| < 1$ при $i = 1, \dots, m$, $|\mu_j^0| > 1$ при $j = m+1, \dots, n-1$ и один мультипликатор $\mu_n^0 = 1$; 2) они не имеют в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ периодических траекторий.

Для любого $m = 0, 1, \dots, n-1$ $B_m \neq \emptyset$, так как содержит систему $\dot{x}_1 = -x_1, \dots, \dot{x}_m = -x_m, \dot{x}_{m+1} = x_{m+1}, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_{n-1}, \dot{x}_n = 1$. Можно построить системы, принадлежащие B_m для любого $m = 0, 1, \dots, n-1$, имеющие любое четное число отрицательных мультипликаторов.

Теорема 2. *Множества B_m , $m = 0, 1, \dots, n-1$, являются вложенными C^∞ -подмногообразиями LS_ω^n коразмерности один.*

Так как мультипликаторы μ_i^0 , $i = 1, \dots, n$, системы $\ell_0 \in B_m$ различны, то существует такая ее окрестность V_0 , что любая система $\ell \in V_0$ имеет различные мультипликаторы $\mu_i(\ell)$, $i = 1, \dots, n$, гладко зависящие от ℓ и совпадающие с μ_i^0 при $\ell = \ell_0$.

Теорема 3. 1) *Любая система $\ell_0 \in B_m$ имеет в $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ единственную негиперболическую траекторию. Эта траектория Γ_{ℓ_0} принадлежит множеству E и является квазигиперболической периодической траекторией с мультипликаторами μ_1^0, \dots, μ_m^0 ($\mu_{m+1}^0, \dots, \mu_{n-1}^0$) с модулями меньшими (большими) единицы и мультипликатором 1.*

2) *Для любой системы $\ell_0 \in B_m$ найдутся такие ее окрестность V и окрестность U траектории Γ_{ℓ_0} , что множество $V \setminus B_m$ состоит из двух компонент V^- и V^+ , таких, что любая система $\ell \in V^-$ ($\ell \in V^+$) имеет в U две периодические траектории $\Gamma'_\ell \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ с $m+1$ ($n-m-1$) мультипликаторами с модулями меньшими (большими) единицы и $\Gamma''_\ell \subset E$ с m ($n-m$) мультипликаторами с модулями меньшими*

(большими) единицы. При этом топологические пределы $\lim_{\ell \rightarrow \ell_0} \Gamma'_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \ell_0} \Gamma''_\ell = \Gamma_{\ell_0}$.

Замечание. Утверждения теорем 2 и 3 остаются верными, если в B_m включить системы, среди мультипликаторов $\mu_1^0, \dots, \mu_{n-1}^0, \mu_n^0 = 1$ которых имеются и комплексные, причем $\operatorname{Re} \mu_i^0 \neq \operatorname{Re} \mu_j^0$, если $i \neq j$ и $\mu_i^0 \neq \bar{\mu}_j^0$.

3. Доказательство теоремы 1. Достаточно доказать, что для любой системы $\ell_0 \in \operatorname{LS}_\omega^n$, имеющей единичный мультипликатор, есть сколь угодно близкая система, не имеющая такового.

Пусть $\ell_* \in \operatorname{LS}_\omega^n : \dot{x} = x$, $\ell_\varepsilon = \ell_0 + \varepsilon \ell_* : \dot{x} = (A(t) + \varepsilon I)x + b(t)$.

Тогда $X(t, \ell_\varepsilon) = e^{-\varepsilon t} X(t, \ell_0)$ и $X(\omega, \ell_\varepsilon) = e^{-\varepsilon \omega} X(\omega, \ell_0)$. Для любой окрестности V системы ℓ_0 в $\operatorname{LS}_\omega^n$ найдется такое $\bar{\varepsilon} > 0$, что при всех $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$ $\ell_\varepsilon \in V$. Поскольку все собственные значения матрицы $X(\omega, \ell_\varepsilon)$ получаются из собственных значений матрицы $X(\omega, \ell_0)$ умножением на $e^{-\varepsilon \omega}$, то при достаточно малом $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ все они отличны от единицы, что и требовалось доказать.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $\ell_0 \in B_m$ и V_0 ее окрестность определенная выше. Определим C^∞ -функцию $f: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f(\ell) = \ln \mu_n^*(\ell)$. Ясно, что $f(\ell_0) = 0$. Пусть ℓ_ε – та же система, что в доказательстве теоремы 1. Тогда $f(\ell_\varepsilon) = \ln e^{-\varepsilon \omega} = -\varepsilon \omega$ и $f'(\ell_0) \ell_* = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} f(\ell_0 + \varepsilon \ell_*) = -\omega \neq 0$. Следовательно, $f'(\ell_0) \neq 0$. Считая окрестность V_0 достаточно малой, будем иметь $f'(\ell) \neq 0$ для всех $\ell \in V_0$ и $f^{-1}(0) = B_m \cap V_0$. Поэтому B_m – вложенное C^∞ -подмногообразие коразмерности один в $\operatorname{LS}_\omega^n$.

5. Доказательство теоремы 3. Пусть $\ell_0 \in B_m$, а $\ell \in V_0$. Отображение $P_\ell: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ последования по траекториям ℓ сечения $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^n \times \{0\}$ в точках $x \in \mathbb{R}^n$ имеет вид $x \mapsto X(\omega, \ell)x + a(\ell)$, где

$$a(\ell) = X(\omega, \ell) \int_0^\omega X^{-1}(t, \ell) b(t, \ell) dt.$$

Если окрестность $V_1 \subset V_0$ уравнения ℓ_0 достаточно мала, то при $\ell \in V_1$ мультипликаторы $\mu_i(\ell)$, $i = 1, \dots, n-1$, не совпадают с 1, и существует матрица $T(\ell)$, гладко зависящая от $\ell \in V_1$, такая, что

$$T^{-1}(\ell) X(\omega, \ell) T(\ell) = \operatorname{diag}(\mu_1(\ell), \dots, \mu_n(\ell)) \text{ для любого } \ell \in V_1.$$

В координатах $(y_1, \dots, y_n) = y = T^{-1}(\ell)x$ отображение P_ℓ имеет вид

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (\mu_1(\ell)y_1 + a_1(\ell), \dots, \mu_n(\ell)y_n + a_n(\ell)),$$

где $a_i(\cdot) \in C^\infty$, $i = 1, \dots, n$. В координатах

$$z_i = y_i + a_i(\ell)/(\mu_i(\ell) - 1), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad z_n = y_n$$

отображение P_ℓ запишется следующим образом:

$$(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \mapsto (\mu_1(\ell)z_1, \dots, \mu_{n-1}(\ell)z_{n-1}, \mu_n(\ell)z_n + a_n(\ell)).$$

Так как P_{ℓ_0} не имеет в \mathbb{R}^n неподвижных точек, то $a_n(\ell_0) \neq 0$. Для определенности, пусть $a_n(\ell_0) > 0$. Случай $a_n(\ell_0) < 0$ рассматривается аналогично. Уменьшив при необходимости окрестность V_1 , можно считать, что

$$a_n(\ell) > 0 \quad \text{для всех } \ell \in V_1. \quad (1)$$

В локальной карте с координатами

$$\zeta_1 = z_1/z_n, \dots, \zeta_{n-1} = z_{n-1}/z_n, \quad \zeta_n = 1/z_n \quad (2)$$

P_ℓ имеет вид

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n) \mapsto \left(\frac{\mu_1(\ell)\zeta_1}{\mu_n(\ell) + a_n(\ell)\zeta_n}, \dots, \frac{\mu_{n-1}(\ell)\zeta_{n-1}}{\mu_n(\ell) + a_n(\ell)\zeta_n}, \frac{\zeta_n}{\mu_n(\ell) + a_n(\ell)\zeta_n} \right). \quad (3)$$

Это отображение имеет одномерное локальное инвариантное многообразие W_1 , задаваемое условиями $\zeta_1 = \dots = \zeta_{n-1} = 0$. Ограничение P_ℓ на W_1 можно записать в следующей форме

$$P_\ell \Big|_{W_1} : \zeta_n \mapsto g(\zeta_n, \ell), \quad (4)$$

где

$$g(u, \ell) = \frac{u}{\mu_n(\ell) + a_n(\ell)u}, \quad g'_u(u, \ell) = \mu_n^{-1}(\ell), \quad g''_{uu}(u, \ell) < 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем, что ограничение P_{ℓ_0} на W_{ℓ_0} имеет единственную неподвижную точку с координатой $\zeta_n = 0$, причем ее кратность равна двум. Отсюда и из (3) следует, что уравнения $\zeta_1 = \dots = \zeta_{n-1} = \zeta_n = 0$ задают квазигиперболическую периодическую траекторию Γ_{ℓ_0} с мультипликаторами $\mu_1^0, \dots, \mu_{n-1}^0, 1$.

В локальной карте с координатами

$$\zeta_1 = z_1/z_k, \dots, \zeta_{k-1} = z_{k-1}/z_k, \quad \zeta_k = 1/z_k, \quad \zeta_{k+1} = z_{k+1}/z_k, \dots, \zeta_n = z_n/z_k, \\ k = 1, \dots, n-1, \quad P_{\ell_0} \text{ имеет вид}$$

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \mapsto \left(\frac{\mu_1^0}{\mu_k^0} \zeta_1, \dots, \frac{\mu_{k-1}^0}{\mu_k^0} \zeta_{k-1}, \frac{1}{\mu_k^0} \zeta_k, \frac{\mu_{k+1}^0}{\mu_k^0} \zeta_{k+1}, \dots, a_n(\ell_0) \zeta_k + \frac{1}{\mu_k^0} \zeta_n \right). \quad (6)$$

Поэтому уравнения $\zeta_1 = \dots = \zeta_{n-1} = \zeta_n = 0$ задают гиперболическую периодическую траекторию системы ℓ_0 .

Так как периодические траектории системы ℓ_0 принадлежат E , то из (3) и (6) получаем, что периодических траекторий, отличных от описанных выше, система ℓ_0 не имеет. Утверждение 1) теоремы доказано.

Пусть U – окрестность траектории Γ_{ℓ_0} , задаваемая в координатах (2) при $\ell = \ell_0$ неравенствами $|\zeta_i| < 1, i = 1, \dots, n$. Мы можем считать, что окрестность $V \subset V_1$ уравнения ℓ_0 выбрана так, что $V \setminus B_m$ состоит из компонент V^- и V^+ , причем $\mu_n(\ell) < 1$ ($\mu_n(\ell) > 1$) при $\ell \in V^-$ ($\ell \in V^+$).

Если окрестность V достаточно мала, то из (1), (4) и (5) следует, что при $\ell \in V^-$ ($\ell \in V^+$) $P_\ell|_{W_\ell}$ имеет две неподвижные точки: O' с координатой $\zeta_n = \zeta_n^0(\ell) > 0$ ($\zeta_n = \zeta_n^0(\ell) < 0$), причем $\zeta_n^0(\ell) \rightarrow 0$, если $\ell \rightarrow \ell_0$, $g'_u(\zeta_n^0(\ell), \ell) < 1$ ($g'_u(\zeta_n^0(\ell), \ell) > 1$) и O'' с координатой $\zeta_n = 0$, причем $g'_u(0, \ell) > 1$ ($g'_u(0, \ell) < 1$). Через точку O' (O'') проходит периодическая траектория Γ'_ℓ (Γ''_ℓ) с мультипликаторами $\mu_1(\ell)/\mu_n(\ell), \dots, \mu_{n-1}(\ell)/\mu_n(\ell)$ и $g'_u(\zeta_n^0, \ell)$ ($g'_u(0, \ell)$), при этом $\lim_{\ell \rightarrow \ell_0} \Gamma'_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \ell_0} \Gamma''_\ell = \Gamma_{\ell_0}$. Если окрестность V достаточно мала, то $\Gamma'_\ell, \Gamma''_\ell \subset U$, все мультипликаторы Γ'_ℓ и Γ''_ℓ отличны от 1, а число мультипликаторов с модулем меньшим (большим) 1 совпадает с числом, указанным в пункте 2) теоремы.

Система $\ell \in V^- \cup V^+$ не может иметь в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ больше одной периодической траектории. Из (3) следует, что она не может иметь и в $U \cap E$ более одной периодической траектории. Поэтому периодических траекторий, отличных от Γ'_ℓ и Γ''_ℓ , в U нет.

Утверждение 2) теоремы доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* О структуре пространства линейных векторных полей // *Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире.* 2015. № 9-1. С. 177-182.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.

УДК 512.546

С. Р. Султанов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: s.sultanov@rsu.edu.ru

О ДИСКРЕТНЫХ ГРУППАХ С НЕКОТОРЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОСТРАНСТВО ПОДГРУПП

Значительный интерес в теории непрерывных групп представляет исследование пространства $L_E(G)$ замкнутых подгрупп топологической группы G . Как известно, налагая определенные условия топологического характера на пространство $L_E(G)$ замкнутых подгрупп топологической группы G , мы определяем необходимые условия алгебраического характера на самой группе G . Аналогично, задавая строение группы, мы получаем вполне определенные им свойства пространства ее замкнутых подгрупп.

Настоящая статья посвящена изучению дискретных групп, обладающих псевдокомпактным пространством подгрупп $L_E(G)$ в E – топологии на пространстве $L(G)$. Доказывается, что если дискретная группа обладает псевдокомпактным пространством подгрупп, то данная группа будет удовлетворять условию минимальности для подгрупп. Данный результат применяется для описания дискретных абелевых групп с условием псевдокомпактности пространства подгрупп $L_E(G)$.

Ключевые слова: пространство подгрупп, псевдокомпактность, условие минимальности.

S. R. Sultanov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: s.sultanov@rsu.edu.ru

DISCRETE GROUPS WITH SOME RESTRICTIONS ON THE SPACE OF SUBGROUPS

Considerable interest in the theory of continuous groups is the study of the space $L_E(G)$ of closed subgroups of a topological group G . As you know, imposing certain conditions of topological nature on the space $L_E(G)$ of closed subgroups of a topological group G , we define the necessary conditions of algebraic character on the group G . Similarly, asking for a group structure, we obtain certain properties of the space of its closed subgroups.

This article is devoted to the study of discrete groups with pseudocompact the space of subgroups $L_E(G)$ in the E – topology on the space $L(G)$. It is proved that if a discrete group has pseudocompact space of subgroups, this group will satisfy the minimality condition for subgroups. This result is applied to describe a discrete Abelian groups with the condition of pseudocompactness space of subgroups $L_E(G)$.

Keywords: the space of subgroups, pseudocompactness, the minimality condition.

Пусть G – дискретная группа, $L(G)$ – множество, состоящее из всех подгрупп группы G . Полагая

$$D_1(U) = \{H \in L(G) | H \subset U\}, \quad D_2(V) = \{H \in L(G) | H \cap V \neq \emptyset\},$$

мы получаем, что множества вида $D_1(U) \cap D_2(V_1) \cap \dots \cap D_2(V_n)$, где U, V_1, V_2, \dots, V_n – всевозможные подмножества G , будут образовывать базу топологии на $L(G)$, называемой E -топологией. Следуя [1] пространство $L(G)$ с определенной на нем E -топологией обозначим $L_E(G)$. Отметим, что пространство $L_E(G)$ будет вполне регулярным, как подпространство пространства 2^G [2, с.193].

Рассмотрим группу G , обладающую псевдокомпактным пространством $L_E(G)$.

Теорема 1. Если пространство $L_E(G)$ псевдокомпактно, то группа G не содержит свободных элементов.

Доказательство. Предположим, найдется элемент $a \in G$, имеющий бесконечный порядок. Возьмем бесконечную последовательность: $a, a^2, \dots, a^n, \dots$. Заметим, что все элементы данной последовательности попарно различны. Определим множество

$$A = [\langle e \rangle, \langle a \rangle] = \{H \in L_E(G) | \langle e \rangle \subset H \subset \langle a \rangle\}.$$

Отметим, что для любой конечно порожденной подгруппы H группы G в пространстве $L_E(G)$ найдется ее окрестность, которая будет содержать единственный элемент – данную подгруппу H . Действительно, если $H = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, то множество

$$U(H) = D_1(H) \cap D_2(b_1) \cap \dots \cap D_2(b_n)$$

будет являться искомой окрестностью.

Так как любая подгруппа циклической группы сама является циклической группой, то каждый элемент из определенного выше множества

A входит в A вместе со своей одноэлементной окрестностью пространства $L_E(G)$. Следовательно, A - открытое подмножество пространства $L_E(G)$. Заметим также, что A является замкнутым подмножеством пространства $L_E(G)$ по [1, лемма 2], и потому пространство A – псевдокомпактно. Таким образом, в силу того, что пространство A дискретно, оно не может быть бесконечным по [2, с. 311], но при этом $\{a, a^2, \dots, a^n, \dots\} \subset A$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Для группы G справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 2. Если пространство $L_E(G)$ псевдокомпактно, то группа G является группой с условием минимальности для подгрупп.

Доказательство. Допустим, что в группе G не выполняется условие минимальности для подгрупп. Поэтому существует бесконечная, строго убывающая последовательность $H_1 > H_2 > \dots > H_n > \dots$ подгрупп группы G . Тогда мы можем выбрать: элемент $a_1 \in H_1$ так, что $a_1 \notin H_2$, $a_2 \in H_2$ так, что $a_2 \notin H_3, \dots, a_n \in H_n$ так, что $a_n \notin H_{n+1}$ и так далее. Значит, мы можем построить бесконечную последовательность, состоящую из попарно различных элементов $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ группы G , где элементы $a_i \in H_i$ для каждого $i = \overline{1, \infty}$, такую, что для всех натуральных чисел i и j при $i \neq j$ подгруппы $\langle a_i \rangle \neq \langle a_j \rangle$. Действительно, если $i < j$, то $a_i \notin H_j$, следовательно $a_i \notin \langle a_j \rangle$, так как $\langle a_j \rangle \subset H_j$.

Определим множество $B = \{\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle, \dots\}$. Оно является бесконечным и состоит из открытых подмножеств пространства $L_E(G)$. Покажем, что семейство B - локально конечное. Рассмотрим любую точку $H \in L_E(G)$. Если $H \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle \right) = \emptyset$, то окрестность $D_1(H)$ точки H в $L_E(G)$ не имеет пересечения с каждым подмножеством $\langle a_i \rangle$ для всех $i = \overline{1, \infty}$. Пусть $H \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle \right) \neq \emptyset$, тогда, обозначив m - минимальный индекс i для которого $a_i \in H$, получим, что окрестность $D_1(H) \cap D_2(a_m)$ не будет пересекаться с каждым из множеств $\langle a_n \rangle$ при всех $n > m$. Значит, мы установили, что семейство B - локально ко-

нечное. Тогда, поскольку пространство $L_E(G)$ является псевдокомпактным, семейство V является конечным [2, с.311], и полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Покажем, что для произвольной дискретной группы G будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть H – подгруппа и N компактная инвариантная подгруппа группы G . Тогда, если пространство $L_E(G)$ – псевдокомпактно, то пространства $L_E(H)$ и $L_E(G/N)$ также являются псевдокомпактными.

Доказательство. Для каждой подгруппы H группы G множество $[\langle e \rangle, H]$ является замкнутым подмножеством пространства $L_E(G)$ (лемма 2 [1]). Заметим, что если $H' \in [\langle e \rangle, H]$, то $D_1(H') \subset [\langle e \rangle, H]$. Таким образом, множество $[\langle e \rangle, H]$ – открытое в $L_E(G)$, следовательно, $[\langle e \rangle, H]$ псевдокомпактно, как открыто-замкнутое подпространство $L_E(G)$. Интервал $[\langle e \rangle, H]$ и пространство $L_E(H)$ гомеоморфны ([1], лемма 5), и, таким образом, пространство $L_E(H)$ – псевдокомпактно.

Пусть N – компактная инвариантная подгруппа группы G . Тогда множество N является конечным, и, если $N = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то для каждой подгруппы $N' \in [N, G]$ ее окрестность

$$D_1(N') \cap D_2(a_1) \cap \dots \cap D_2(a_n) \subset [N, G].$$

Следовательно, интервал $[N, G]$ – открытое подмножество пространства $L_E(H)$. Далее заметим, что множество $[N, G]$ замкнуто в пространстве $L_E(G)$ и, потому $[N, G]$ является псевдокомпактом. Тогда $L_E(G/N)$ является псевдокомпактным по лемме 5 из [1] и по [2, с. 312].

Используя полученные результаты, рассмотрим вопрос о строении абелевой группы G с условием псевдокомпактности пространства $L_E(G)$.

Теорема 4. Пространство $L_E(G)$ абелевой группы G псевдокомпактно тогда и только тогда, когда G является прямым произведением

$$G \cong C_{p_1^\infty} \times C_{p_2^\infty} \times \dots \times C_{p_n^\infty} \times K,$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – различные простые числа, и порядок конечной абелевой группы K не делится ни на одно из них.

Доказательство. Пусть пространство $L_E(G)$ псевдокомпактно. Тогда по теореме 2 группа G будет удовлетворять условию минимальности для подгрупп, следовательно, группа G имеет вид

$$G \cong C_{p_1^\infty} \times C_{p_2^\infty} \times \dots \times C_{p_n^\infty} \times K,$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – простые числа; K – конечная абелева группа [3, с. 339].

Докажем, что все числа p_i различные. Предположим, некоторое p входит дважды в указанное представление группы G . Тогда произведение $C_{p^\infty} \times C_p$ будет являться подгруппой группы G . Обозначим $G_1 = C_{p^\infty} \times C_p$ и покажем, что пространство $L_E(G_1)$ не является псевдокомпактным.

Действительно, $G_1 = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b \rangle$, где $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$, и $a_1^p = e$, $a_2^p = a_1$, ..., $a_{n+1}^p = a_n$, ..., $b^p = e$, при этом пересечение подгрупп $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$.

Рассмотрим подгруппы $A_n = \langle a_n b \rangle$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Так как для любых натуральных чисел n и k элемент $a_n \in A_{n+k}$ и при этом $a_n \notin A_n$, то все A_n – попарно различны. Действительно, если элемент $a_n \in A_n$, то найдем число $s \in \mathbb{Z}$ такое, что $a_n = (a_n b)^s$. Тогда $a_n^{1-s} = b^s$, и потому целые числа s и $(1-s)$ делятся на простое число p , что невозможно. Заметим, что $(a_{n+k} b)^{p^k} = a_n$, следовательно, $a_n \in A_{n+k}$.

Рассмотрим семейство $A = \{\{A_1\}, \{A_2\}, \dots, \{A_n\}, \dots\}$. Данное семейство бесконечно, все его элементы различны, и поскольку каждая подгруппа A_n является конечно порожденной, оно состоит из открытых подмножеств пространства $L_E(G_1)$. Нетрудно доказать, что семейство подмножеств A является локально конечным. Действительно, пусть $H \in L_E(G_1)$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\} \subset H$. Если окрестность $D_1(H)$ точки H в пространстве $L_E(G_1)$ пересечется с некоторым множеством $\{A_n\} \in A$, то $a_n b \in H$ и тогда $b \in H$. Заметим, что при этом окрестность

$D_1(H) \cap D_2(b)$ точки H в пространстве $L_E(G_1)$ не пересекается ни с одним $\{A_i\} \in A$, $i = \overline{1, \infty}$, так как элемент $b \notin A_i$ для всех $i = \overline{1, \infty}$.

В случае же, когда найдется $a_n \notin H$, то $D_1(H) \cap \{A_i\} = \emptyset$ при $i > n$. Таким образом, A - локально конечное семейство открытых множеств в $L_E(G_1)$. Тогда в силу бесконечности построенного семейства A пространство $L_E(G_1)$ не псевдокомпактно по [2, с. 311], что противоречит теореме 3.

Таким образом, мы установили, что все числа p_i , $i = \overline{1, n}$ в представлении группы G являются различными. Тогда пространство $L_E(G)$ является нормальным в силу [4], и так как оно псевдокомпактно, то по [2, с. 310] оно является счетно-компактным. Поскольку $L_E(G)$ счетное по [5], то оно является компактным. В теореме 2 [1] показано, что дискретная группа G обладает компактным пространством $L_E(G)$ тогда и только тогда, когда группа G изоморфна произведению $C_{p_1^\infty} \times C_{p_2^\infty} \times \dots \times C_{p_n^\infty} \times K$, где p_1, p_2, \dots, p_n - различные простые числа, и порядок конечной группы K не делится ни на одно из них. Данный факт завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Протасов И.В. Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сибир. мат. журн. 1979. Т. 20, № 2. С. 378–385.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир. 1986. 752 с.
3. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
4. Панасюк С.П. О топологических абелевых группах с нормальной решеткой замкнутых подгрупп // VIII Всесоюз. симп. по теории групп: тез. докл. Сумы. 1982. С. 93.
5. Полецких В.М. Топологічні групи із зміщенням числом підгруп // Вісник Київського університету. 1979. № 21. С. 127–134.

УДК 523.531: 539.17

Н. А. Седьмов, А. А. Залуцкий

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: cross@yandex.ru, zalutskii@mail.ru*

**МЕССБАУЭРОВСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ
МАГНИТНОЙ ФРАКЦИИ ИЗ ГЛУБОКОВОДНЫХ
ОКЕАНИЧЕСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ**

Методами мессбауэровской спектроскопии, растровой электронной микроскопии и термомангнитного анализа изучены 13 образцов магнитной фракции. Образцы получены методом магнитной сепарации из глубоководных глин Индийского и Тихого океанов. Основными минералами исследованных образцов являются гематит и нестехиометрический магнетит.

Ключевые слова: магнитные частицы, глубоководные глины, магнетит, гематит.

N. A. Sed'mov, A. A. Zalutskii

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: cross@yandex.ru, zalutskii@mail.ru*

**MESSBAUER SPECTROSCOPY OF MAGNETIC FRACTION
FROM DEEP OCEAN SEDIMENTS**

By messbauer spectroscopy, raster electron microscopy and termomagnetic analysis studied samples of the magnetic fraction. The samples were separated by magnetic separation from deep-sea clays of the Indian and Pacific oceans. Magnetite and hematite are the main minerals of the samples.

Keyword: magnetic particle, deep-sea clays, magnetite and hematite.

Введение. Океанические осадки широко используются при палеомагнитных исследованиях, поскольку обладают малой скоростью накопления минерала и хорошо стратифицируются. Эти исследования имеют большое значение для установления закономерностей осадконакопления, изучения истории магнитного поля Земли и решения частных вопросов морской геологии. Глинистые минералы, представляющие группу водных алюмосиликатов, являются наиболее распространенными терригенными минералами океанических осадков. В океанических осадках чаще всего

встречаются четыре типа глинистых минералов: хлорит, иллит, каолинит и монтмориллонит. Глубоководные глины могут содержать магнитные микрочастицы метеоритной и вулканической пыли, а также частицы, которые сформировались на земной поверхности и за счет эолового разноса попали на поверхность океана [1].

Объекты и методы. Сильномагнитные частицы для последующего изучения были выделены методом магнитной сепарации из двух колонок глубоководных глин. Одна из них была взята с глубины 5000 метров в Западноавстралийской котловине Индийского океана во время 35 рейса научно-исследовательского «ВИТЯЗЬ» (ст. 5172). Другая колонка глубоководных осадков была поднята со дна Тихого океана с глубины 5700 метров во время 33 рейса НИС «ВИТЯЗЬ» (ст.5038). Подробное описание места и методики отбора донных осадков ст. 5172 приведено в [2].

Полученные в наше распоряжение образцы представляли собой отдельные участки колонок длиной примерно по 50 сантиметров, из которых уже были вырезаны кубики для проведения палеомагнитных исследований. В ходе магнитной сепарации из колонки ст. 5172 было получено 5 образцов, из колонки ст.5038 – 8 образцов

Обсуждение результатов. Изучение магнитной фракции из глубоководных глин с помощью световой и растровой электронной микроскопии показало, что основная ее масса, представлена черными непрозрачными, с блестящей поверхностью, частицами неправильной формы. В единичных случаях встречаются образования октаэдрической формы, которая свойственна кристаллам магнетита. Сферических магнитных микрочастиц очень мало. Их количество не превышает 1-2 % от общего числа частиц. Это согласуется с данными, приведенными в работе [2]. Отделение их от общей массы ферромагнитного материала затруднено.

На рис. 1 представлены микрофотографии частиц, входящих в состав магнитной фракции ст.5172 и ст.5038.

Для сравнения, на рис. 2 показаны микрофотографии микротектитов из океанических осадков Западноавстралийской котловины [1]. Цвет выделенных магнитных микрочастиц различен. Чаще всего встречаются коричневые или желто-коричневые образования. Характер поверхности разнообразен и варьируется от гладкой стекловидной до неровной с вмятинами неправильной формы.

Основная часть магнитной фракции, по-видимому, представлена зернами магнетита или титаномагнетита, который имеет терригенное или вулканогенное (земные подводные вулканы), а также эдафогенное (продукты разрешения дна) происхождение.

Для магнитной фракции из различных участков донных колонок ст.5172 и ст.5038 были сняты мессбауэровские спектры (рис. 3).

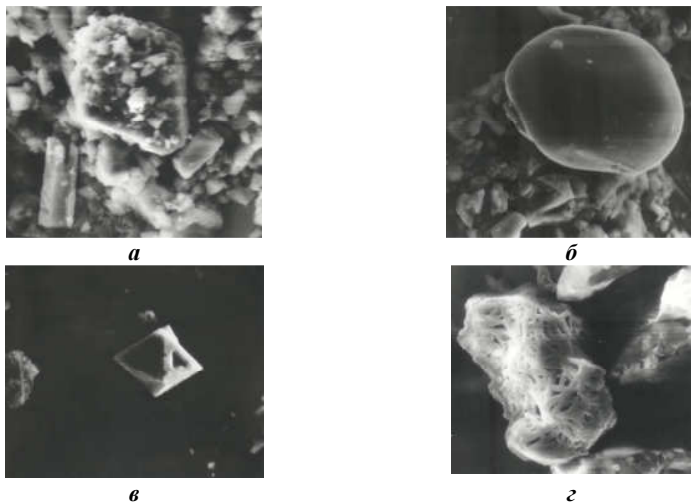


Рис. 1. Микрофотографии магнитной фракции из глубоководных глин под электронным микроскопом:
a – агрегаты неправильной формы длиной 270 мкм; *б* – трансформированная сферула диаметром длиной 300 мкм; *в* – агрегат неправильной формы длиной 200 мкм; *г* – форма с ровной поверхностью диаметром 250 мкм

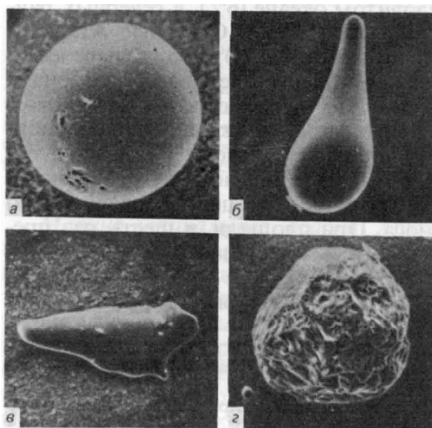
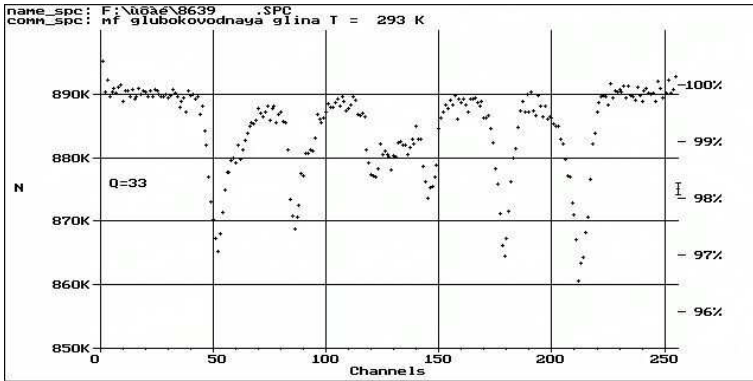
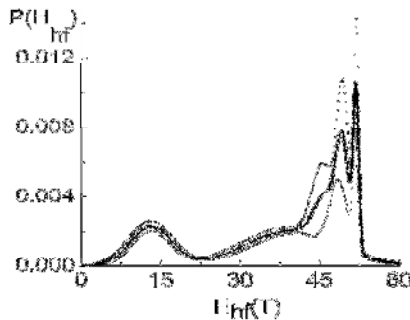


Рис. 2. Микрофотографии микротектитов Австралийского поля под сканирующим электронным микроскопом:
a – сферула диаметром 470 мкм; *б* – каплевидная форма длиной 880 мкм; *в* – микротектит неправильной формы длиной 535 мкм; *г* – форма с неровной поверхностью диаметром 250 мкм (Данные из работы [1])



а



б

Рис. 3. Типичный спектр поглощения ядер ^{57}Fe в магнитной фракции из глубоководных глин при $T = 300\text{ K}$ (а) и функция распределения сверхтонкого магнитного поля $\rho(H_{\text{Hf}})$ (сплошная линия) с учетом среднеквадратичного отклонения (штриховые линии) (б)

В табл. 1 приведены параметры спектров. Из анализа полученных результатов видно, что основным минералом исследованных частиц, является магнетит. В некоторых образцах выявлено незначительное количество гематита, образовавшегося, по всей видимости, при окислении магнетита.

Отличительная особенность Fe_3O_4 , выявленная по данным мессбауэровской спектроскопии, - его нестехиометричность. В ходе математической обработки в большинстве спектров наблюдается заметное уширение линий секстета В для магнетита. Это может свидетельствовать об изоморфных замещениях в решетке магнетита. В пользу данного предположения свидетельствуют два факта:

– температура Кюри для всех образцов как из колонки ст. 5172, так и ст. 5038, полученная в ходе термомагнитного анализа, ниже температуры Кюри чистого магнетита на 30-40 °С.

– полученные мессбауэровские спектры можно описать с достаточной хорошей точностью не двумя, а тремя секстетамии. При этом полуширины линий в секстетамии магнетита получаются близкими, а величина параметра χ^2 несколько ниже, чем при аппроксимации исходного спектра двумя секстетамии. Значения параметров при таком разложении спектров на отдельные компоненты вполне приемлемы и достаточно близки к тем, что приведены в работах [3, 4].

С целью уточнения особенностей минералогического состава были проведены термомагнитные исследования имеющихся образцов. Термомагнитный анализ образцов из колонки ст. 5038 показал, что все они имеют близкие температуры Кюри, которые лежат в интервале 534-552 °С. Величины намагниченности насыщения для них в исходном состоянии практически совпадают. После нагрева до 650 °С ее величина уменьшается в 1,5-2 раза. В меньшей степени изменяется остаточная намагниченность насыщения. Блокирующие температуры для образцов данной колонки близки к температурам Кюри.

Для образцов из колонки ст. 5172 температура Кюри варьируется в более широком интервале, чем для образцов колонки ст. 5038. Так магнитная фракция из горизонта 148-200 см имеет температуру Кюри 505 °С, а из горизонта 52-100 см – 540 °С. По всей видимости, величина изоморфных замещений для магнетитовых зерен в данной колонке меняется в достаточно широком интервале. Также обнаружено, что с увеличением глубины отбора образцов в колонке намагниченность насыщения возрастает.

На кривой нагрева при проведении термомагнитного анализа образцов из данной колонки имеется участок, на котором намагниченность насыщения линейно падает с ростом температуры. Но в отличие от колонки ст. 5038, кривая охлаждения идет выше кривой нагрева и на ней нет линейного участка. При температурах менее 150 °С обе кривые смыкаются. Поэтому после завершения цикла нагрев-охлаждение намагниченность насыщения образцов возвращается к первоначальной величине. Кривые нагрева при изучении зависимости намагниченности насыщения от температуры для образцов обоих имеют колонок одну общую черту – линейный участок в области температур 300-450 °С. Подобное поведение может свидетельствовать либо о присутствии в данных образцах ферромагнитных зерен с различными температурами Кюри, либо о структурных неоднородностях в данных зернах. Предпочтение следует отдать второй версии, поскольку после однократного прогрева данный участок на кривых термомагнитного анализа отсутствует.

Таблица 1. Скорость притока магнитных сферических частиц на поверхность Земли

Образец			$H_{эфф}$	Изомерный сдвиг	Квадрупольное расщеп.	Ширина линии	Относительная площадь
Место отбора	Условия съемки		кЭ	мм/с	мм/с	мм/с	%
Ст.5172 2,5-52 см	Исходный	1	487	0,58	0,05	0,58	30,5
		2	451	0,78	0,00	0,90	30,0
		3	415	0,96	0,13	1,27	20,0
		4	–	1,21	1,88	1,16	20,5
	Отжиг	1	513	0,65	0,18	0,37	14,5
		2	487	0,58	0,04	0,46	36,0
		3	453	0,91	0,07	0,67	31,5
		4	–	0,66	0,93	1,05	18,0
Ст.5038 520-570 см	Исходный	1	507	0,59	0,04	0,42	18,8
		2	488	0,59	0,03	0,57	42,4
		3	446	0,80	0,06	1,08	28,3
		4	–	0,57	0,84	1,78	10,5
	Отжиг	1	513	0,63	0,16	0,34	30,3
		2	488	0,59	0,04	0,59	43,7
		3	452	0,69	- 0,02	1,00	15,6
		4	–	0,68	1,27	1,11	10,4

Для выяснения процессов, происходящих при лабораторном нагреве, был проведен отжиг образцов 2,5–52 см из колонки ст.5172 и 520–571 см из колонки ст. 5038 при температуре 500 °С в течение 2 часов. По завершению отжига сняты мессбауэровские спектры, параметры которых представлены в таблице 1. В образце из колонки ст. 5172 после температурного воздействия доля магнетита возросла, а гематита уменьшилась по сравнению с образцом в исходном состоянии. Для образцов из колонки ст.5038 наблюдается обратная тенденция – рост доли гематита с одновременным уменьшением количества магнетита. Видимо, в исходном состоянии данные образцы имеют различный минералогический состав, что и предопределяет протекание различающихся процессов при нагревании и ведет к не совпадающему конечному составу.

Полученные данные позволяют утверждать, что в образцах колонки ст. 5038 идет процесс окисления магнетита. Это подтверждается уменьшением намагниченности насыщения после нагрева и ростом остаточной коэрцитивной силы $H_{ср}$ и величины разрушающего поля $H_{1/2I}$. Правда, в данной колонке имеются три образца, для которых рост коэрцитивных пара-

метров при нагревании отсутствует. По всей видимости, здесь имеют место два конкурирующих процесса: с одной стороны, наблюдаются структурные изменения зерен ферромагнетика, сопровождающиеся уменьшением остаточной коэрцитивной, а с другой стороны – появление гематита, приводящее к ее увеличению.

С образцами из колонки ст. 5172 ситуация несколько иная. Ранее уже отмечалось, что в изученных образцах донных отложений нестехиометричность магнетита объясняется изоморфными замещениями в его решетке. По всей видимости, на катионы титана. При нагреве в образцах данной колонки может происходить дифференциация катионов примеси и железа. При этом появляются фазы различным соотношением железа и этой примеси. Наблюдаемый рост коэрцитивных параметров, в частности остаточной коэрцитивной силы, можно объяснить появлением мелких зерен обедненного магнетита и возможным разбиением основного зерна ферромагнетика на более мелкие при выпадении фазы богатой катионами примеси.

Выводы. В ходе изучения магнитной фракции из донных глубоководных отложений установлено, что содержание магнитных сферических частиц мало. В основном, магнитная фракция в исследованных образцах представлена черными непрозрачными, с блестящей поверхностью, частицами неправильной формы. Мессбауэровские и магнитные измерения позволили установить, что эти образования являются зернами титаномагнетита, которых содержание ульвошпинели не превышает $X = (0,08-0,1)$. Значение коэрцитивных параметров позволяет заключить, что между отдельными магнитными зернами данных образцов имеется магнитное взаимодействие, по величине которого можно предположить присутствие титаномагнетита. Тенденция изменения магнитных параметров в ходе термомагнитного анализа для образцов из двух исследованных колонок различна. Это связано, по-видимому, с различием в исходном минералогическом составе. Магнитные свойства ферромагнитных зерен, выделенных из различных частей одной колонки, отличаются, что можно объяснить особенностями осадконакопления в процессе формирования донных отложений в различных районах мирового океана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кеннетт Дж.* Морская геология. В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1987. 384 с.
2. *Свальнов В.Н.* Четвертичное осадконакопление в восточной части Индийского океана. М.: Наука, 1983. 192 с.
3. *Tanaka H.* Mossbauer spectro of titanomagnetite: a reappraisal / H. Tanaka, M. Koho // *J. Geomagnetic Geoelectric.* 1987. V. 39. P. 463–475.
4. *Jensen S.D.* Cation distribution in sintezid titanomagnetites // S.D. Jensen, P.N. Shive. // *J. of Geophes. Res.* V. 78, N. 35. P. 8474–8480.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 378

М. А. Башкин, В. С. Силин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru, silin@rsatu.ru

КУРС «ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ» НА ОСНОВЕ БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается применение балльно-рейтинговой системы к курсу «Дискретной математики». Авторы считают, что использование БРС помогает преодолеть школярство и развить ответственность, а значит, повысить качество образования и профессионализм выпускника.

Ключевые слова: балльно-рейтинговая система, компетенции, качество образования.

M. A. Bashkin, V. S. Silin

*P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University,
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru, silin@rsatu.ru*

THE COURSE "DISCRETE MATHEMATICS" ON THE BASIS OF A POINT RATING SYSTEM

The article discusses the use of point-rating system for the course "Discrete mathematics". The authors believe that using the PRS helps to improve the quality of education and professionalism of the graduate.

Keywords: point-rating system, competence, quality of education.

В настоящее время перед российской высшей школой стоит задача повышения качества образования. Одним из направлений решения которой является использование новых форм контроля качества обучения. В этой статье мы рассматриваем балльно-рейтинговую систему применительно к курсу «Дискретной математики» [1, 2], читаемому на кафедре высшей математики РГАТУ имени П.А. Соловьева. Балльно-рейтинговая система (БРС) представляет собой шкалу сопоставления качества и объема знаний студентов, по которой определяется индивидуальный рейтинг каждого из них [3]. Рейтинг – это некая числовая величина, выраженная по многобалльной системе и интегрально характеризующая успеваемость и

знания студентов, а также их участие в учебно-исследовательской работе [4]. Основной целью БРС является определение уровня качества и успешности освоения студентом учебной дисциплины через балльные оценки и рейтинги с измеряемой в зачетных единицах трудоемкостью каждой дисциплины и образовательной программы в целом. БРС рассматривается не только как система оценки знаний студентов, но и как важнейшая часть системы контроля качества образовательной деятельности университета.

Основные задачи БРС:

- увеличение доли самостоятельной работы студентов;
- повышение мотивации студентов к активной систематической учебной работе в течение всего семестра по усвоению фундаментальных знаний и умений по дисциплине;
- совершенствование планирования и организации учебного процесса посредством повышения роста индивидуальных форм работы со студентами;
- выработка единых требований к оценке знаний в рамках отдельной дисциплины;
- организация непрерывного мониторинга за работой студентов в течение всего семестра;
- осуществление постоянного контроля за успеваемостью самими студентами и преподавателями;
- получение дифференцированной и разносторонней информации о качестве и результативности обучения с целью морального и материального поощрения студентов [5].

БРС позволяет студентам:

- понимать систему формирования оценок по дисциплине и другим видам занятости с целью получения итоговых оценок;
- осознать необходимость систематической работы по выполнению учебного плана на основании знания своей текущей рейтинговой оценки по дисциплине и ее изменение из-за несвоевременного освоения материала;
- своевременно оценить состояние своей работы по изучению дисциплины, выполнению всех видов учебной нагрузки до экзаменационной сессии;
- в течение семестра вносить коррективы по организации текущей самостоятельной работы.

БРС система дает возможность преподавателям:

- подробно планировать учебный процесс по конкретной дисциплине и стимулировать работу студентов за систематическую работу;
- своевременно вносить коррективы в организацию учебного процесса по результатам текущего рейтингового контроля;

- объективно определять итоговую оценку по дисциплине с учетом систематической работы;

- обеспечить градацию оценки уровня знаний по сравнению с традиционной системой [6].

Любой преподаватель заинтересован:

- в стимулировании самоорганизации деятельности студента по изучению его курса;

- в осуществлении объективного контроля работы студента и получаемых им знаний;

- в возможности дифференцированного подхода к обучению студентов, имеющих разные способности.

Все эти заинтересованности могут быть реализованы в БРС. БРС является не только технологией оценивания, но и организационной технологией, позволяющей отойти от чисто репродуктивной системы обучения.

Технология БРС уже не первый год применяется нашей кафедрой. Рассмотрим принципы применения БРС на курсе «Дискретной математики» направления 09.03.04 «Программная инженерия». По данному курсу предусмотрены следующие виды занятий:

- лекционные занятия в объеме 18 часов;

- практические занятия в объеме 36 часов.

Точками контроля получаемых знаний являются:

- контрольная работа № 1;

- контрольная работа № 2;

- типовой расчет;

- экзамен.

Помимо этого возможен контроль выполнения текущих домашних заданий, посещаемости, а также контроль с помощью «быстрых» самостоятельных работ.

Также возможно использование системы «штрафов-поощрений», учитывающей нерадивость студента или его активность на занятии, дополнительную работу по написанию рефератов, докладов на конференциях, написание статей, участие в конференциях и олимпиадах.

Трудоемкость каждого контрольного мероприятия зависит от общей трудоемкости дисциплины для студента – 144 часа. Исходя из этого, можно предложить следующую систему оценки, где 1 балл = 1 час:

Основная часть:

- контрольная работа № 1 – 36 баллов;

- контрольная работа № 2 – 36 баллов;

- типовой расчет – 36 баллов;

- экзамен 36 баллов (36 часов определено программой).

Итого: 144 балла.

Дополнительная часть:

- выполнение текущих домашних заданий – минус 1 балл за каждое невыполненное задание;

- написание «быстрых» самостоятельных работ (5–10 минут) – от 1 до 3 баллов;

- посещаемость – 0 баллов, если не оценивать, и минус 0,5 балла за каждое занятие, пропущенное без уважительной причины (если решим бороться за посещаемость);

- дополнительные баллы к итоговому рейтингу: от 1 до 10 баллов или на усмотрение преподавателя:

- за активную работу на занятиях в аудитории;

- подготовку реферата по теме предмета;

- подготовку тезисов доклада, доклад на конференции или статья по теме, связанной с оцениваемой дисциплиной.

Для унификации оценок рейтинг в баллах целесообразно перевести в процентный. Баллы, набранные студентом, постоянно суммируются, и его рейтинг рассчитывается по формуле

$$R(\%) = \frac{\sum \text{баллы, набранные студентом к текущему моменту}}{\text{трудоемкость освоенной студентом части дисциплины}} \times 100\%.$$

Это позволяет сделать универсальную шкалу для всех читаемых предметов и всех контрольных точек, независимо от разницы в количестве баллов.

Формула расчета рейтинга в конце семестра такая же:

$$R(\%) = \frac{\sum \text{баллы, набранные студентом в семестре}}{\text{трудоемкость дисциплины для студента}} \times 100\%.$$

В нашем университете принята следующая градация перевода рейтинговой оценки в академические отметки:

$$R(\%) \geq 91\%$$

Отлично

$$76\% \leq R(\%) \leq 90\%$$

Хорошо

$$60\% \leq R(\%) \leq 75\%$$

Удовлетворительно

$$30\% \leq R(\%) < 60\%$$

Неудовлетворительно

$$R(\%) < 30\%$$

Неудовлетворительно,

студент к сдаче экзамена не допускается.

Очевидно, что если пользоваться предложенной системой оценки, то рейтинг может получиться более 100 процентов, но мы думаем, что это можно допустить, чтобы отделить студентов, просто успевающих на «отлично», от студентов, принимающих активное участие в научной работе или в олимпиадах.

В БРС принятие четких разделительных границ по академическим оценкам имеет ряд недостатков. Очевидно, что рейтинги в 75% и в 76% почти равновесные, но в академической оценке получается разница в балл. Поэтому на экзамене к пограничным состояниям надо относиться более чутко. На взгляд авторов, погрешность в 1-2% является нормой, и поэтому студента лучше «подтянуть» к верхней границе. Этим самым, с одной стороны, мы даем ему стимул, а с другой – предъявляем требования к более четкому отношению к своему рейтингу в следующем семестре.

Безусловно, в течение семестра студент должен иметь возможность влиять на свой рейтинг. Для этого предусмотрена возможность однократного переписывания каждой контрольной или самостоятельной работы. Можно позволить переписывать лишь неудовлетворительные работы с $R(\%) < 60\%$ до оценки $R(\%) = 60\%$. Так же возможно введение понижающего коэффициента при оценке переписанных работ. Это будет стимулировать студента к написанию работ с первого раза.

Штрафные баллы за невыполненные домашние работы, могут быть возвращены путем выполнения не сделанных к сроку работ (при этом возможно и их частичное возвращение).

Дополнительные баллы обычно ставятся в конце семестра за активную работу «у доски», олимпиадную и научную деятельность. При этом учитывается не столько участие, сколько наличие результата.

Помимо сказанного, БРС позволяет предварительно ранжировать студентов не только по уровню успеваемости, но и уровню формирования их компетенций. Можно выделить следующие группы:

A1: $R(\%) < 30\%$ Компетенции не сформированы, требуется выполнение значительного объема работы (либо повтор курса в установленном порядке, либо основание для отчисления).

A2: $30\% \leq R(\%) < 50\%$ Компетенции не сформированы, требуется выполнение значительного объема работы.

A3: $50\% \leq R(\%) < 65\%$ Сформированы компетенции на уровне повторения решения стандартных задач (и то не всегда).

V1: $65\% \leq R(\%) < 73\%$ Сформированы компетенции на уровне повторения решения стандартных задач. Сформированы компетенции, соответствующие простейшему исполнительскому уровню.

V2: $73\% \leq R(\%) < 85\%$ Сформированы компетенции исполнительского уровня. Возможно решение нестандартных задач.

V3: $85\% \leq R(\%) < 95\%$ Сформированы компетенции исполнительского уровня. Сформированы компетенции для решения нестандартных задач. Возможны компетенции по постановке задачи.

C1: $95\% \leq R(\%) < 105\%$. Сформированы компетенции исполнительского уровня. Сформированы компетенции для решения нестандартных задач. Сформированы компетенции постановщика задач.

C2: $R(\%) \geq 105\%$. Сформированы компетенции исполнительского уровня. Сформированы компетенции для решения нестандартных задач. Сформированы компетенции постановщика задач. Возможны компетенции по реализации собственных проектов.

Такое деление весьма условно. Но очевидно, что если студент умудряется набрать рейтинг более 100%, то это не просто хорошо успевающий студент, а студент уже способный решать нестандартные задачи, вести исследовательскую работу, вести какие-то собственные разработки.

С помощью технологии БРС студент может осуществлять текущий контроль своей успеваемости, формировать свою образовательную траекторию:

- просто четко выполнять все требования по программе;
- определять необходимость дополнительных занятий;
- принимать участие в математической деятельности кафедры (олимпиады, математический кружок);
- принимать участие в написании рефератов, участвовать в конференциях.

Таким образом, БРС позволяет:

- внедрить дифференцированный подход к оценке знаний,
- интенсифицировать и равномерно распределить нагрузку в течение семестра,
- повысить объективность оценки, исключая случайные факторы,
- стимулировать студента к систематическому самостоятельному обучению,
- предоставить студенту возможность формировать собственную образовательную траекторию.

Для успешного функционирования БРС необходимо:

- полная осведомленность студентов о системе БРС, возможность рассчитывать свой рейтинг самостоятельно;
- постоянное обновление данных рейтинга по результатам контрольных мероприятий, его доступность;
- возможность студента влиять на свой рейтинг путем проведения дополнительных работ.

БРС помогает преодолеть школярство и развить ответственность, а значит, повысить качество образования и профессионализм выпускника [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bashkin M.A.* On the innovative methods of teaching of discrete mathematics / M.A. Bashkin, V.G. Durnev // International journal of experimental education. 2010. №6. P.30.
2. *Башкин М.А.* Активизация познавательной деятельности студентов на основе использования информационных технологий при проведении лекционных занятий по дискретной математике в техническом вузе // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по материалам международного науч.-практ. конф. 2015. №8, Ч. 4 (19-4). Воронеж: ВГЛТУ. С.403-405.
3. *Тарасенко О.В.* Балльно-рейтинговая система оценивания знаний студентов в условиях аграрного вуза / О.В. Тарасенко, Ж.А. Димиденко // Молодой ученый. 2014. №1. С. 579-581.
4. *Опрятков В.И.* Внедрение балльно-рейтинговой системы оценки знаний студентов в ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет» // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Сер. Гуманитарные и социальные науки. 2012. № 5. С. 457-459.
5. Балльно-рейтинговая система оценки знаний в контексте формирования единого пространства европейского высшего образования / Л.А. Габдрахимова, В.С. Бухмин, Е.Я. Балашова, Е.А. Соколова, К.С. Фатхуллова // Вестник Казанского энергет. ун-та. 2012. Т.6, № 3. С. 139-145.
6. *Девятова И.Е.* Из опыта внедрения рейтинговой системы оценки успеваемости студентов // Вестник Южно-Уральского проф. ин-та. 2012. Т.8, № 2. С. 47-58.
7. *Юдин В.В.* Технологическое проектирование педагогического процесса: монография. М.: Университетская книга, 2008. 300 с.

УДК 519.233.5:378

Г. А. Бергер, Т. В. Дорф

Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) им. М.И. Платова
Россия, г. Новочеркасск, e-mail: galinaberger@yandex.ru ,tavido@mail.ru

**МЕТОД "CASE-STUDY" ПРИ ОБУЧЕНИИ
МАТЕМАТИКЕ**

В статье описывается методика применения кейс-технологий при изучении курса "Математика", направленная на формирование профессиональных компетенций, активизирующая профессионально ориентированную деятельность студентов.

Ключевые слова: интерактивные методы, Case Studies, корреляционный анализ.

G. A. Berger, T. V. Dorf

*Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
Russia, Novocherkassk, e-mail: galinaberger@yandex.ru, tavidov@mail.ru*

THE CASE-STUDY METHOD AT TEACHING MATHEMATICS

In this article we describe application methodology of case technologies in studies of mathematics which is aimed on developing professional competences and activating profession-oriented student's activity.

Keywords: *interactive approach, case-study, correlation analysis.*

В настоящее время в российском образовании идет процесс активного внедрения практико-ориентированных технологий, форм и методов обучения.

Одним из них является метод конкретных ситуаций (метод *case-study*) - метод активного проблемно-ситуационного анализа, основанного на обучении путем решения конкретных задач-ситуаций.

Главной целью этого метода является анализ группой студентов ситуации, имеющей отношение к реальной жизни, отражающей какую либо практическую задачу. Обучающиеся должны проанализировать проблему, предложить ее возможные решения и выбрать из них лучшее. Применение этого метода позволяет достичь баланса между академической и практической подготовкой специалиста, так как получение наилучшего практического решения базируется на определенном комплексе знаний, которым студент овладевает благодаря фундаментальной подготовке.

Необходимость внедрения кейс-технологии при обучении математике поддерживается требованиями новых образовательных стандартов для бакалавриата. ФГОС основан на компетентностном подходе - подходе, акцентирующем внимание на результате образования, причем в качестве результата рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность человека действовать в конкретной ситуации. Достижение такого результата невозможно без использования в учебном процессе интерактивных технологий обучения, среди которых важную роль играет кейсовая технология.

В научно-методической литературе, посвященной данной технологии, предлагают различные этапы создания кейсов. В своей работе по созданию кейсов мы использовали следующие этапы:

1) разработку ситуационной задачи на основе профессионально-ориентированной проблемы;

- 2) построение программной карты кейса;
- 3) сбор учебной и научно-технической информации;
- 4) разработку наполнения кейса, включающего в себя:
 - описание профессионально ориентированной проблемы и формулировку ситуационной задачи;
 - необходимую для анализа задачи информацию;
 - формулировку заданий для организации поэтапной работы студентов по подготовке к решению основной ситуационной задачи;
- 5) написание текста кейса;
- 6) внедрение кейса в практику обучения.

Хотелось бы предложить обучающий кейс по обобщению темы «Корреляционный анализ», предназначенный для студентов второго курса технических и экономических специальностей. Данный кейс позволяет реализовать такие компетенции, как:

- способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач;
- способность выбрать инструментальные средства обработки данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать полученные расчеты и обосновать полученные выводы;
- способность находить решения в профессиональной деятельности и нести за них ответственность.

В нём также осуществляются межпредметные связи таких дисциплин, как «Математика», «Информатика», «Экономика».

Кейс «Определение зависимости между ценой на нефть и курсом рубля по отношению к доллару»:

1. Обобщенная формулировка задания.

Выявление видов и степени корреляционных зависимостей между двумя признаками по имеющимся статистическим данным.

2. Ключевое задание.

По данным за 2015 год и данным за апрель 2015 года получить оптимальные уравнения зависимостей между ценой на нефть марки «Brent» и курсом рубля по отношению к доллару США.

3. Теоретические сведения:

- статистическое распределение выборки;
- графическое представление выборки;
- уравнения регрессии;
- коэффициент корреляции и коэффициент детерминации, проверка значимости.

4. Инструментарий.

Для успешной реализации данного кейса необходима установка одного из пакетов «Mathcad», «Matlab», «Statistica», «Mathematica». Однако данный вид кейса может быть также реализован в «Microsoft Excel».

5. Задания, которые приведут к решению:

– сбор информации о цене на нефть и курсе рубля к доллару в указанные промежутки времени (этот этап выполнения кейса может быть предложен студентам в качестве домашнего задания);

– первичная обработка полученных статистических данных;

– построение различных корреляционных моделей при помощи имеющихся математических пакетов;

– проверка значимости полученных коэффициентов корреляции;

– выбор оптимальных моделей для каждого из выбранных периодов;

– сравнительный анализ степени зависимости курса рубля от цены на нефть для различных временных промежутков;

– анализ полученных результатов.

Следует отметить, что представленный кейс реализует принцип единства фундаментального и прикладного в обучении математике. Приведённый теоретический материал создаёт фундаментальную математическую базу исследования, на основе которой решается задача прикладного характера, что поддерживает интерес студентов к изучению данной темы и мотивирует необходимость дальнейшего приобретения фундаментальных знаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный Государственный Образовательный Стандарт Высшего Професионального Образования по направлению подготовки 380301 «Экономика» (уровень «бакалавр»).

УДК 372.851+378.147

Н. И. Бессарабов, В. Н. Зяблин

Южно-Российский государственный политехнический университет

(НПИ) им. М.И. Платова

Россия, г. Новочеркасск, e-mail: zyablinvn@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ЮРГПУ (НПИ): ОПЫТ РАБОТЫ КАФЕДРЫ

Обобщается опыт работы кафедры "Высшая математика" ЮРГПУ (НПИ) по фундаментальной и общинженерной подготовке обучаемых в техническом вузе.

Ключевые слова: фундаментальное образование, математическое образование, уровень подготовки, самостоятельная работа.

N. I. Bessarabov, V. N. Zyablin

*Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
Russia, Novocherkassk, e-mail: zyablinvn@yandex.ru*

**MATHEMATICAL EDUCATION IN SRSPU (NPI):
EXPERIENCE THE DEPARTMENT**

We generalize the experience of the work of the department "Higher Mathematics" SRSPU (NPI) for the fundamental and general engineering training of students at the technical university

Keywords: *fundamental education, mathematical education, level of training, individual work.*

Ускорение научно-технического прогресса во всех областях знаний делает актуальной задачу обеспечения непрерывного роста профессионального мастерства в течение всей трудовой деятельности. Современная система подготовки специалистов должна обеспечить инновационное развитие экономики, а для этого необходимо опережающее воспроизводство потребности в кадрах, ориентированных на новые перспективные и эффективные технологические процессы мирового уровня, создание интеллектуального и профессионального потенциала общества. Все это возможно осуществить на базе многоуровневой подготовки специалистов, базирующейся на хорошей фундаментальной подготовке.

Принцип фундаментальности образования ориентирует строить обучение, создавая выпускникам вузов условия и возможности адаптироваться к быстро изменяющимся условиям и требованиям современного производства в течение короткого времени.

Основное назначение программ подготовки бакалавров заключается в формировании общеобразовательной культуры личности, профессиональных ценностей, необходимых для дальнейшего самоопределения. Это создает возможности для развития творческих способностей обучающихся, их исследовательских навыков, самообразовательной деятельности.

Особую роль в этом играет математика, которая воспитывает умение логически мыслить, развивает аналитическое мышление, привычку критически оценивать и проверять принятые решения, навыки оптимизации.

В последние годы наблюдается снижение уровня теоретической подготовки выпускников общеобразовательных учебных заведений, т.к. для успешной сдачи ЕГЭ вполне достаточно механически освоить алгоритмы "быстрого" решения большого числа заданий (за 235 минут по математике необходимо выполнить 21 задание, решения 7 из которых повышенного и высокого уровня сложности должны быть изложены в работе).

Эта проблема была не столь острой в период, когда в школе существовали обязательные устные экзамены по математике. В этих условиях индивидуализация процесса обучения и дифференциация заданий призваны облегчить адаптацию обучающихся к вузовской системе подготовки. Краткий опрос теории, проводимый почти на каждом практическом занятии, стимулирует обучающихся первого курса к своевременному изучению лекционного материала.

Опрос может проводиться по основным формулам, определениям, формулировкам теорем. Чтобы курс математики не превратился в набор догм, целесообразно включать в такой опрос доказательства теорем, вывод формул. Обучающийся, не справившийся с заданием, отвечает данную тему на консультации.

При отсутствии опыта работы с теоретическим материалом начальный этап формирования этого навыка обучающийся преодолевает на консультации под руководством преподавателя. Облегчает освоение материала сдача теоретических зачетов по "модулям" или традиционные коллоквиумы. Такой подход имеет смысл на начальных этапах вузовского образования, в адаптационный период с последующим постепенным переходом к самостоятельной работе обучающихся.

В связи с переходом на уровневую подготовку и введением в действие ФГОС ВО в университете, были разработаны и утверждены учебные планы всех направлений подготовки реализуемых в настоящее время в ЮРГПУ (НПИ). В соответствии с учебными планами коллективом кафедры "Высшая математика" были разработаны и утверждены рабочие программы по дисциплине "Математика", в которых были внесены корректировки с целью повышения эффективности аудиторных занятий и самостоятельной работы обучающихся.

В сложившихся условиях особое значение приобретает наличие качественной учебно-методической литературы. Кафедра "Высшая математика" уделяет большое значение этому направлению работы, в результате которой создан комплект учебных пособий.

Коллективом кафедры "Высшая математика" ЮРГПУ (НПИ) разработан и издан "Практикум по математике". В данном пособии в соответствии с рабочими программами направлений подготовки, реализуемых в университете, весь материал курса математики разбит на темы, а темы – на практические занятия. Для каждого практического занятия приводятся основные формулы, примеры и задачи для работы в аудитории, а также примеры и задачи для домашнего задания, дополнительные задания повышенного уровня сложности для работы с "сильными" обучающимися. Кроме того, представлены подробные решения типовых задач по каждому практическому занятию и приводятся ответы ко всем заданиям. По всем темам

имеется набор контрольных примеров и задач, которые используются при проверке и оценке знаний обучающихся по каждому модулю.

Использование данного пособия в учебном процессе обеспечивает единый и достаточно высокий уровень проведения практических занятий для всех направлений подготовки обучающихся в университете.

С целью повышения теоретической подготовки обучающихся и успешной сдачи семестровых экзаменов по решению Ученого совета университета коллективом кафедры подготовлен комплект из трех пособий (курс математики изучается три семестра). В этих пособиях содержатся экзаменационные вопросы, основные определения и теоретические сведения по каждой теме, приводятся требования к знаниям обучающихся на оценку "удовлетворительно", "хорошо" и "отлично". Эти требования сформулированы в виде конкретных типов примеров и задач, обсуждены на заседаниях методического семинара кафедры и утверждены на заседании кафедры "Высшая математика".

Изданные методические указания, содержащие обширную подборку задач и образцы решений, позволяют обучающимся более четко сформулировать уровень требований к усвоению материала по каждой теме. Использование данного комплекта пособий позволяет обучающимся более качественно проводить финишную подготовку к сдаче зачетов и экзаменов, что приводит к повышению успеваемости и качества знаний.

В университете в соответствии с учебными планами на большинстве специальностей/направлений подготовки математика изучается в трех семестрах. От этого зависит число сдающих экзамены по курсу математики в зимнюю (1 и 2 курс) и в летнюю (только 1 курс) сессию.

Обучающиеся 1 курса не адаптированы к вузовской системе образования, что объясняет их более низкое качество знаний в зимнюю сессию, по сравнению с результатами обучающихся 2 курса.

В таблице приведены результаты четырех экзаменационных сессий (по состоянию на 1 ноября и 1 апреля текущего учебного года).

Курс обучения	Показатель, %	Сессия 2014 - 2015 учебного года		Сессия 2015 - 2016 учебного года	
		Зимняя	Летняя	Зимняя	Летняя
1 курс	Успеваемость	95,7	96,4	96,1	97,6
	Качество знаний	55,3	56,5	59,6	60,8
2 курс	Успеваемость	97,0	--	97,2	--
	Качество знаний	65,3	--	65,5	--

Анализ данных за последние четыре сессии показывает, что работа кафедры "Высшая математика" по организации аудиторной и самостоятельной работы обучающихся является достаточно эффективной и обеспечивает положительную динамику успеваемости и качества знаний обучающихся по дисциплине "Математика".

В свете поставленных задач представляется целесообразным решать задачу повышения фундаментальной подготовки путем усиления профильной подготовки студентов. Общеизвестно, что мотивация освоения какого-либо вида деятельности прямо пропорциональна осознанию обучающимися полезности и перспектив применения полученных знаний в будущей практической деятельности. С этой целью весьма перспективным является участие преподавателей общеобразовательных и инженерных кафедр в научных семинарах выпускающих кафедр. Такого рода совместная деятельность позволит глубже усвоить наиболее важные для профессиональной деятельности разделы курса, преподаваемые общеобразовательной кафедрой, сформировать примеры, на которых будут иллюстрироваться методы, изучаемые в данной дисциплине. С другой стороны, участие преподавателей общеобразовательных и инженерных кафедр в научных семинарах выпускающих кафедр позволит более успешно решать рассматриваемые вопросы, позволит расширить тематику курсовых и выпускных квалификационных работ путем включения методов математического и физического моделирования, теории планирования эксперимента и математической обработки результатов эксперимента и многое другое.

Анализируя государственные стандарты (ФГОС ВО) и учебные планы подготовки бакалавров (специалистов), следует признать, что в рамках существующих учебных планов задача профилирования подготовки специалистов в полной мере не может быть реализована ввиду дефицита учебного времени, отводимого на изучение дисциплин общеобразовательных и инженерных кафедр.

Одним из вариантов решения задач по повышению фундаментальной и инженерной подготовкой выпускников является включение в учебные планы курсов по выбору. Программы таких курсов должны включать специальные разделы дисциплин, в которых более глубоко рассматриваются вопросы фундаментальной подготовки, играющие важную роль в будущей профессиональной деятельности. Весьма полезным при этом представляется учет пожеланий работодателей, опыт работы зарубежных фирм, определяющих перспективы развития в данном виде трудовой деятельности.

По результатам изучения специальных разделов дисциплин целесообразно выдавать удостоверения, сертификаты, которые могут являться

элементами портфолио выпускника и положительно сказаться на перспективах будущего трудоустройства.

Спецкурсы по выбору, которые не были изучены на этапе подготовки бакалавров (специалистов) и имеют важное значение для производства, можно включить в учебные планы магистратуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Программа развития физико-математического образования в ЮРГТУ (НПИ). Научно-методическая разработка / Б.М. Середин, А.Н. Ткачев [и др.]; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2013. 12 с.
2. Математическое образование в техническом вузе в соответствии с требованиями ФГОС ВО / Н.И. Бессарабов, В.Н. Зяблин // Проблемы баланса фундаментальности и профессиональной направленности физико-математической подготовки инженерных кадров: сб. науч. ст. по проблемам высшей школы / Юж.-Рос. гос. политехн. ун-т (НПИ); под ред. Л.И. Щербаковой. Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2013. С. 26-30.
3. Роль и задачи общеобразовательной кафедры в контексте модернизации инженерного образования / Н.И. Бессарабов, В.Н. Зяблин // Традиции русской инженерной школы: вчера, сегодня, завтра / под ред. А.Н. Ткачева; Юж.-Рос. гос. политехн. ун-т (НПИ) им. М.И. Платова. Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2015. С. 93-96.

УДК 51:378

Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru

О ПРЕДЕЛЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассматриваются задачи студенческих математических олимпиад, связанные с леммой Фейера о пределе $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)dx$, где $\varphi(x)$ — периодическая функция.

Ключевые слова: предел, интеграл, теорема о среднем, лемма Фейера, ряд Фурье.

N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

ON A CERTAIN INTEGRAL LIMIT

Some student's mathematical olympiad tasks, related to the Fejér lemma on a limit of $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)dx$, where $\varphi(x)$ is a periodic function, are considered.

Keywords: limit, integral, mean-value theorem, Fejér's lemma, Fourier series.

Историческая справка. В [1] лемма Фейера формулируется следующим образом:

Пусть $f(x)$, $g(x)$ – комплекснозначные 2π -периодические функции на \mathbb{R} , $f(x) \in L^p$, $g(x) \in L^q$, где $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx. \quad (1)$$

В действительности Л. Фейером [2] было доказано лишь то, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ – интегрируемая на $[a, b]$ функция, а $g(x) = |\sin x|$ или $g(x) = |\cos x|$.

Термин «лемма Фейера» окончательно закрепился за всеми последующими усилениями этого утверждения (см., например, [3, с.77]) после появления книги А. Зигмунда [4]. А. Зигмунд в [4, п. 8.34], ссылаясь на работу Л. Фейера [2], доказал, что равенство (1) справедливо, если $f(x)$ – интегрируемая и $g(x)$ – ограниченная 2π -периодические функции. Отметим, что у А. Зигмунда и Л. Фейера интеграл понимается в смысле Лебега.

Цель настоящей работы – дать решения некоторых олимпиадных задач, связанных с леммой Фейера, а также доказать упрощенный вариант этой леммы, достаточный для наших целей. Нам потребуется

Теорема 1 (Обобщенная теорема о среднем значении [5, с. 126]).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$. Тогда существует $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда для всех $x \in [a, b]$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Следовательно,

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (3)$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то из (3) вытекает, что $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, и равенство (2) справедливо при всех $c \in [a, b]$. Если же $\int_a^b g(x) dx > 0$, то $m \leq C \leq M$,

где $C = \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{-1} \int_a^b f(x)g(x) dx$, и по второй теореме Больцано-Коши ([6], с.191) $f(c) = C$ для некоторого $c \in [a, b]$, что равносильно (2). ■

Задача 1. [7, с. 211]. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |\sin nx| f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$$

для любой непрерывной функции $f(x)$.

Решение.

$$\int_0^\pi |\sin nx| f(x) dx = \left| t = nx \right| = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin t| f\left(\frac{t}{n}\right) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| f\left(\frac{t}{n}\right) dt; \quad (4)$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| f\left(\frac{t}{n}\right) dt = \left| s = t - k\pi \right| = \int_0^\pi f\left(\frac{s+k\pi}{n}\right) \sin s ds \stackrel{(2)}{=} f(c_k) \int_0^\pi \sin s ds = 2f(c_k), \quad (5)$$

где $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $x_n = \pi$. Полагая

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{n}$, из (4) и (5) получаем

$$\int_0^\pi |\sin nx| f(x) dx = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx,$$

поскольку $\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta x_k$ – интегральная сумма непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ с рангом разбиения $\tau = \frac{\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Задача 2. [8, с. 8]. Найти предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 nx} dx$.

Решение 1. Положим $x_0 = 0$, $x_k = k\pi/n$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Имеем

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 nx} dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 nx} dx \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n \left(\cos^2(c_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{1 + \cos^2 nx} \right) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\cos^2(c_k) \int_0^{\pi/2n} \frac{dx}{1 + \cos^2 nx} \right) \Big|_{t = \operatorname{tg} nx} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\cos^2(c_k) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{n} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} \right) \cdot \sum_{k=1}^n \cos^2(c_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \cos^2(c_k) \frac{\pi}{n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \cos^2(c_k) \Delta x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \cos^2 s ds = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Здесь $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Отметим, что, судя по решению этой задачи, приведенному в [8], составители задачи и оргкомитет олимпиады не заметили, что $I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ при всех $n \geq 2$. Поэтому возможно совсем другое решение, не использующее обобщенной теоремы о среднем.

Решение 2. Достаточно показать, что $I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ при всех $n \geq 2$.

Имеем $I_n = L_n - J_n$, где $L_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 nx}$, $J_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{1 + \cos^2 nx} dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{3 + \cos 2nx} dx$.

Поскольку $\frac{1}{1 + \cos^2 x}$ и $\frac{\cos 2x}{3 + \cos 2nx}$ — четные периодические функции с периодом $T = \pi$, то

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 nx} \Big|_{t = nx} = \frac{1}{2n} \int_0^{n\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} \Big|_{s = \operatorname{tg} t} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{3 + \cos 2nx} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{3 + \cos 2nx} dx \Big| t = 2x \Big| = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{3 + \cos nt} dt .$$

Если $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, то отсюда получаем

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{3 + \cos 2lt} dt \Big| s = \frac{\pi}{2} - t \Big| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin s}{3 + (-1)^l \cos 2ls} ds = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции. Следовательно, $I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Если $n = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, то воспользоваться нечетностью функции не удастся. Приведем два способа доказательства, показывающие, что $J_n = 0$ и в этом случае.

а) Имеем

$$\frac{\cos 2x}{1 + \cos^2 nx} = \frac{\cos 2x}{2 - \sin^2 nx} = \frac{\cos 2x}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \sin^{2j} nx = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(j+1)} \cos 2x \sin^{2j} nx ,$$

где ряд справа равномерно сходится на всей числовой оси.

Поэтому $J_n = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+2)} M_j$, где

$$\begin{aligned} M_j &= \int_0^{\pi} \cos 2x \sin^{2j} nx dx = \frac{1}{2^{2j}} \int_0^{\pi} \cos 2x \left[C_{2j}^j + 2 \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-k} C_{2j}^k \cos(2(j-k)nx) \right] dx = \\ &= \frac{C_{2j}^j}{2^{2j}} \int_0^{\pi} \cos 2x dx + \frac{1}{2^{2j-1}} \sum_{k=0}^{j-1} \left[C_{2j}^k \int_0^{\pi} \cos(2(j-k)nx) \cos 2x dx \right] = 0^{1)}, \end{aligned}$$

поскольку $\int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0$, а функции $\cos 2x$ и $\cos 2mx$ ортогональны на $[0, \pi]$ при $m \geq 2$.

б) Функция $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{-1}$ — четная периодическая функция с периодом $T = \pi$. Поскольку $|f'(x)| = |\sin 2x| (1 + \cos^2 nx)^{-2} \leq 1$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на всей числовой оси. По признаку Липшица [9, с. 545] ее ряд Фурье $f(x) = a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos 2jx$ сходится равномерно на всей числовой оси. Отсюда следует, что

$$\frac{\cos 2x}{1 + \cos^2 nx} = a \cos 2x + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos 2x \cos 2jnx ,$$

где ряд справа также сходится равномерно на всей числовой оси.

¹⁾ Как видно из приведенных выкладок, коэффициенты в представлении степени синуса в виде суммы косинусов кратных углов не имеют никакого значения. Важно только понимать, что такое представление возможно!

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{1 + \cos^2 nx} dx = a \int_0^{\pi} \cos 2x dx + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^{\pi} \cos 2x \cos 2jnx dx = 0,$$

поскольку $\int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0$, а функции $\cos 2x$ и $\cos 2mx$ ортогональны на $[0, \pi]$ при $m \geq 2$.

Задача 3. [11; 10, с. 24]. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$, а $\varphi(x)$ — непрерывная периодическая функция на $(-\infty, \infty)$ с периодом T . Доказать, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)\varphi(nx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt \cdot \int_0^1 f(x) dx$.

Решение. Можем считать, что $n > T$. В силу непрерывности, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены: существуют константы M и L такие, что $|\varphi(x)| \leq M$, $x \in [0, T]$; $|f(x)| \leq L$, $x \in [0, 1]$. Положим $\psi(x) = \varphi(x) + M$, $m = m(n) = [n/T]$, $x_k = kT/n$, $k = 0, 1, \dots, m$. Поскольку $\psi(x) \geq 0$, то применима теорема 1:

$$\int_0^1 f(x)\psi(nx) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\psi(nx) dx + J_n = \sum_{k=0}^{m-1} \left(f(c_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(nx) dx \right) + J_n,$$

где $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $J_n = \int_{x_m}^1 f(x)\psi(nx) dx$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(nx) dx = \left| t = nx \right| = \frac{1}{n} \int_{kT}^{(k+1)T} \psi(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^T \psi(t) dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\psi(nx) dx - J_n &= \int_0^T \psi(t) dt \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(c_k)}{n} = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) dt \cdot \sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) dt \cdot (S_n - I_n), \end{aligned}$$

где $I_n = f(c_{m-1})(1 - x_m)$, а $S_n = \sum_{k=0}^{m-2} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) + f(c_{m-1})(1 - x_{m-1})$ — интегральная сумма функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ с рангом разбиения

$\lambda_n = 1 - x_{m-1} < \frac{2}{m} < \frac{2T}{n-T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поскольку

$$|J_n| \leq 2ML(1 - x_m) < \frac{4MLT}{n-T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad |I_n| \leq L(1 - x_m) < 2LT/(n-T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)\psi(nx)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[J_n + \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)dt \cdot (S_n - I_n) \right] = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)dt \cdot \int_0^1 f(x)dx .$$

Используя полученное равенство, для исходных функций получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)\varphi(nx)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)[\psi(nx) - M]dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)\psi(nx)dx - M \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)dt \cdot \int_0^1 f(x)dx - M \int_0^1 f(x)dx = \\ &= \left[\frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)dt - M \right] \cdot \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T [\psi(t) - M]dt \cdot \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)dt \cdot \int_0^1 f(x)dx . \end{aligned}$$

Замечание 1. В приведенном выше решении задачи 3 нигде не использовался тот факт, что n – число целое. Тем самым доказана

Теорема 2. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[0, 1]$, а $\varphi(x)$ – непрерывная периодическая функция на $(-\infty, \infty)$ с периодом T . Тогда

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)\varphi(sx)dx = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)dt \cdot \int_0^1 f(x)dx . \quad (8)$$

Замечание 2. Поскольку множество непрерывных на $[0, 1]$ функций всюду плотно в $L_1([0, 1])$ (см., например, [12, с.396]), то из теоремы 2 вытекает справедливость равенства (8) для любой интегрируемой на $[0, 1]$ функции $f(x)$.

ЗАДАЧИ

4. ([13, с. 115]). Функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и периодична с периодом $T > 0$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx)dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x)dx$.

5. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \cdot \{nx\} dx$, где $f(x)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция, а $\{u\} = u - [u]$ — дробная часть числа $u \in \mathbb{R}$.

6. Для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx)dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)dx = 0$$

(частный случай леммы Римана).

7. Найти предел $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^9 \sqrt{2x(1 + \cos(\lambda x))} dx$.

8. [13]. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) g(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$, где функция $f(x)$ непрерывная на $[0, 2\pi]$, а $g(x) = \sin x + |\sin x|$.

9. [13]. Для непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ вычислить предел $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(\sin \lambda x) \cos(x) dx$.

10. [13]. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-1, 1]$, а функция $g(x)$ непрерывна на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(\sin \lambda x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin t) dt \cdot \int_0^1 g(x) dx.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edwards R.E.* Fourier series. A modern introduction, V.1. Springer-Verlag, 1979. 224 p.
2. *Fejér L.* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1910. **138**. 22-53.
3. *Барн Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Изд-во ФМЛ, 1961. 936 с.
4. *Zygmund A.* Trigonometrical series. Warszawa-Lwów: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1935.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 864 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 680 с.
7. *Кожухов И.Б.* Московские городские студенческие олимпиады по математике за 1996-2009 гг. / И.Б. Кожухов, В.А. Свентковский, Т.В. Соколова. М.: Техполиграфцентр, 2010. 294 с.
8. *Попов И.Ю.* Задачи студенческих математических олимпиад. Т. 1. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. 154 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 728 с.
10. *Садовничий В.А.* Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. М.: МГУ, 1987. 310 с.
11. *Шубин М.А.* Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1975. 48 с.
12. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. 7-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
13. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ: Сборник задач. Киев: Вища школа, 1987, 408 с.

УДК 51

В. О. Кузнецов, Н. М. Гулевич

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: kvo_kuz@mail.ru,*
gulevich.nikolay@gmail.com

О СОСТАВЛЕНИИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются проблемы, возникающие при составлении экзаменационных и олимпиадных задач.

Ключевые слова: *тест, экзамен, зачет, олимпиада, задача.*

V. O. Kuznetsov, N. M. Gulevich

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru*

ON THE COMPOSING OF EXAMINATION AND OLYMPIAD TASKS

The problems, arising in composing of examination and olympiad tasks are considered.

Keywords: *test, examination, credit, olympiad, task.*

В последнее время уровень подготовки студентов по математике в технических вузах часто оценивают с помощью тестовой проверки остаточных знаний студентов (см., например, [1–6]). Чтобы студенты адаптировались к такой форме оценки знаний, целесообразно зачеты и экзамены по математике проводить полностью или частично в тестовом режиме. Использовать компьютерный зал для проведения экзамена/зачета, как правило, не удастся, и возникает дилемма: либо распечатать тестовые задания, взяв их, например, на соответствующем сайте в интернете, либо составить задачи самому. В обоих случаях проверять задачи обычно приходится экзаменатору непосредственно во время экзамена.

Каждый преподаватель математики знает, что проверка вычислительной задачи или расчетно-графического задания занимает значительно меньше времени, если известен ответ. Если ответ у студента верен и по-

следовательность действий разумна, то беглого взгляда на задачу достаточно, чтобы ее зачесть. Если ответ неверен, то придется, конечно, потратить какое-то время на поиск ошибки в выкладках – ведь экзамен не зря считается частью процесса обучения. Студент должен «увидеть» свою ошибку и уйти с экзамена, будучи уверен в объективности полученной им оценки. Заметим, что уровень математической подготовки бывших абитуриентов зачастую так низок, что к арифметическим ошибкам студентов приходится относиться весьма серьезно, тем более, что при тестовой проверке в компьютерном зале пример с арифметической ошибкой зачтен не будет. Тем не менее, если значительная часть студентов (конечно, при нормальном течении учебного процесса) получает верный ответ, то наличие ответов у экзаменатора может значительно сократить время экзамена. Эти ответы, однако, приходится где-то хранить, прятать от студентов на экзамене, держать при себе (если приходится перемещаться во время экзамена по аудитории) и т.д. Короче, их никогда нет под рукой именно в тот момент, когда они больше всего нужны. И тут вспомнилась история, которой поделился как-то выпускник мат-меха ЛГУ.

В 239 математическом лицее Петербурга (тогда еще Ленинграда) проводится контрольная работа по математике. Ученики сидят, решают задачи. Кто-то, решив задачу, поднимает руку. Преподаватель, не вставая с места, спрашивает у ученика ответ. Услышав ответ – 3, интересуется, какой у ученика номер варианта. Узнав, что номер варианта 3, делает вид, что сверяет его со своими записями, и говорит, что задача решена верно и ученик может переходить к следующей задаче. По такой же схеме проверились ответы и у остальных учеников.

В математическом лицее связь номера варианта с ответом в задаче угадать, конечно, не удалось. Иначе эта история и не стала бы известна. Но мы преподаем не на математическом факультете, и решено было опробовать эту идею на практике. У нас в университете на многих факультетах тема «Определители и матрицы» вынесена на самостоятельное изучение. И, несмотря на наличие расчётно-графического задания по этой теме, на коллоквиуме (экзамене) хочется проверить, может ли студент самостоятельно с помощью бумаги и авторучки вычислить определитель. И тут наличие ответа значительно упрощает проверку. Смотрим, каким методом вычислялся определитель (метод Саррюса не поощряется) и какой получен ответ. Если все в порядке, то пример засчитывается – проверка занимает считанные секунды.

Стандартная функция в Excel позволяет вычислить определитель квадратной матрицы. Потратив некоторое время, с помощью Excel был составлен 21 определитель с номерами от 0 до 20 и с ответами от –10 до 10. Чтобы у студента не было соблазна «втихаря» использовать калькулятор, а

тем более смартфон, определители были подобраны с небольшими числами. А чтобы скрыть от студентов связь номера задачи с ее ответом, формула этой связи была незначительно усложнена:

$$\text{Ответ} = N - 10,$$

где N – номер варианта. Ниже приведена копия этого файла.

0.	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$	1.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	2.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
3.	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$	4.	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	5.	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
6.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	7.	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	8.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
9.	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	10.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	11.	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
12.	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	13.	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$	14.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
15.	$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	16.	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	17.	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$
18.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	19.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	20.	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

Этот файл с тех пор не раз использовался преподавателями нашей кафедры. Так что время, потраченное на подготовку файла, многократно окупилось.

Поскольку вариант с задачами на вычисление определителя оказался удачным, то по аналогичному принципу было решено составить варианты задач по векторной алгебре, аналитической геометрии и т.д., то есть в тех разделах, где ответом является число или набор чисел и где не требуется проверка символьных преобразований. Так, например, числовые данные в задаче 16-го варианта

Найти координаты основания D высоты AD треугольника ABC , если $A(2;4)$; $B(-1;5)$; $C(5;8)$.

были подобраны так, чтобы ответом являлось: $(1;6)$.

Пока дело ограничивалось задачами по аналитической геометрии и векторной алгебре на плоскости, условия задач легко подбирались на клетчатой бумаге. Но для пространственных задач такой способ не подходит. Поэтому для подбора подходящих исходных данных для задач в пространстве были написаны макросы на Visual Basic. Эти макросы делали перебор исходных данных в небольшом диапазоне, а результаты выводили в текстовый файл, с помощью которого и подбирались данные требуемых задач. Так, например, с помощью макроса были найдены 10 пирамид (с целочисленными координатами вершин) с высотами от 1 до 10. Чтобы исходные данные различных вариантов не совпадали, было решено использовать формулу

$$\text{Ответ} = (N-1) \bmod 10 + 1,^{2)}$$

а условия вариантов при $N > 10$ получить, сделав параллельный перенос на целочисленный вектор исходных данных первых 10 вариантов.

Попытка составить аналогичные задачи на нахождение высоты треугольника в пространстве, однако, натолкнулась на неожиданное препятствие (треугольники, со сторонами параллельными координатным осям, заведомо исключались из рассмотрения). Искомые треугольники с помощью макроса были найдены, но координаты вершин треугольников, даже при небольших N , оказались довольно большими числами, так что нахождение высоты треугольника без калькулятора уже требовало бы от студента определенных усилий. Тогда, чтобы уменьшить исходные данные, была предпринята попытка отказаться от требования целочисленности ответа и использовать формулу $\text{Ответ} = \sqrt{N}$, где N определяется номером варианта. Был написан соответствующий макрос, но результат оказался неожиданным: искомые треугольники с высотами, квадрат которых равен 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и 10 были мгновенно найдены, а с высотой, равной $\sqrt{7}$ – нет. Попытка расширить перебираемый диапазон исходных данных также

²⁾ Последняя цифра номера варианта, или 10, если эта цифра – 0.

ни к чему не привела. В результате от этой идеи также пришлось отказаться. Но, как в хорошем производстве, даже отходы идут в дело. И было решено использовать полученный результат в олимпиаде по математике.

Задача *. Доказать, что высота пространственного треугольника с целочисленными вершинами не может равняться $\sqrt{7}$.

Однако доказательство этого утверждения нам тогда найти не удалось. Поэтому в университетскую олимпиаду была включена задача в более простой формулировке.

Задача 1. (Математическая олимпиада ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова, 16.03.2016).

Доказать, что треугольник с целочисленными вершинами, лежащий в плоскости *Оху*, не может иметь высоту, равную $\sqrt{3}$.

Решение. Можем считать, что одна из вершин треугольника, пусть A , совпадает с началом координат. Пусть $(a; b)$, $(c; d)$ — координаты вершин B и C соответственно. Тогда $h_C = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|ad - bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Если $h_C = \sqrt{3}$, то отсюда получаем

$$(ad - bc)^2 = 3(a^2 + b^2). \quad (1)$$

Так как a и b однородно входят в (1), то можем считать, что они взаимно просты. Из (1) вытекает, что $(ad - bc)^2 \bmod 3 = 0$. Значит, $(ad - bc)^2 \bmod 9 = 0$ и, следовательно,

$$(a^2 + b^2) \bmod 3 = 0. \quad (2)$$

Если $n \in \mathbb{Z}$ и $n \bmod 3 \neq 0$, то $n - 3m = \pm 1$ при некотором $m \in \mathbb{Z}$, и, значит, $n^2 \bmod 3 = (9m^2 \pm 6m + 1) \bmod 3 = 1$. Из (2) поэтому вытекает, что $a \bmod 3 = b \bmod 3 = 0$. А это невозможно, так как a и b взаимно просты.

В заключение приведем найденное нами в процессе подготовки этой статьи

Решение задачи *. Из приведенного выше решения задачи 1 видно, что для того чтобы существовал пространственный треугольник с целочисленными вершинами с высотой равной $\sqrt{7}$ *необходимо*, чтобы уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7n^2 \quad (3)$$

имело нетривиальное решение в целых числах. Если у чисел a, b, c есть общий делитель k , то $n \bmod k = 0$, и тогда, сокращая обе части уравнения (3) на k^2 , получим уравнение такого же типа. Поэтому можем считать, что числа a, b и c взаимно просты (наибольший общий делитель этих чисел равен 1).

Если $m \in \mathbb{Z}$, то либо $m \bmod 4 = 0$ и $m^2 \bmod 8 = 0$, либо $m \bmod 4 = 2$ и $m^2 \bmod 8 = 4$, либо m – нечетно и $m^2 \bmod 8 = 1$. В частности, $7n^2 \bmod 8 \in \{0, 4, 7\}$. Сравнивая остатки по модулю 8 обеих частей уравнения (3) и перебирая все возможные варианты, приходим к выводу, что ни одно из чисел a, b, c нечетным быть не может, т.е. у этих чисел есть общий делитель – 2. Полученное противоречие доказывает, что у уравнения (3) нетривиальных целочисленных решений нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов А.В.* Разработка педагогической программы мониторинга качества знаний студентов посредством электронного онлайн ресурса «Дневник.ру» / А.В. Смирнов, И.В. Семенова, В.А. Иктисанов // Психология, социология и педагогика. 2013. № 10.
2. *Старицына С.Г.* Тестовый контроль в современной системе образования // Среднее профессиональное образование. 2010. № 12. С. 15-17.
3. *Гитман М.Б.* Об одном подходе к контролю уровня сформированности базовых компетенций выпускников вуза / М.Б. Гитман, А.Н. Данилов, В.Ю. Столбов // Высшее образование в России. 2012. № 4. С. 13-18.
4. *Донская С.Ю.* Адаптивный тестовый контроль на основе информационных технологий / С.Ю. Донская, М.Б. Митупов // Бюллетень Восточно-Сибирского научного центра СО РАН. 2010. № 2. С. 132-133.
5. *Карпенко А.П.* Тестовый контроль качества обучения и критерии качества образовательных тестов. Обзор / А.П. Карпенко, А.С. Домников, В.В. Белоус // Наука и образование: электронное науч.-техн. издание. 2011. № 04.

УДК 63:311

А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ И БЕЗОПАСНОСТЬЮ ПИЩЕВОЙ ПРОДУКЦИИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ

Представлены результаты апробации применения математических методов обработки количественных показателей в комплексных исследованиях студентов при написании бакалаврских работ в области ветеринарии.

Ключевые слова: биометрическая обработка, ветеринарно-санитарная экспертиза, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, управление качеством и безопасностью пищевой продукции.

A. S. Ermishin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

**THE APPLICATION OF STATISTICAL METHODS
IN QUALITY MANAGEMENT AND FOOD SAFETY
BY PREPARATION OF BACHELORS**

We describe the results of approbation the application of mathematical methods of processing of quantitative indicators in the integrated student's studies at writing of graduation of bachelor's thesis in the field of veterinary.

Keywords: *biometric processing, veterinary-sanitary examination, analysis of variance, correlation analysis, quality management and food safety.*

В системе высшего образования России существует множество направлений подготовки (специальностей), и заметное место среди них занимают естественнонаучные, в том числе укрупнённая группа направлений 360000 «Ветеринария и зоотехния». По направлению «Зоотехния» в бакалаврских и магистерских выпускных квалификационных работах традиционно широко используются методы вариационной статистики (термин предложен Дункером в 1899 г.), или биометрии (термин предложен Фр. Гальтоном в 1889 г.), что является, несомненно, сильной стороной дипломных работ. В выпускных квалификационных работах по направлению «Ветеринарно-санитарная экспертиза» и специальности «Ветеринария» данные методы в настоящее время используются крайне редко.

В системе управления качеством и безопасностью пищевой продукции большое значение имеет правильная и как можно наиболее полная статистическая обработка показателей. Важно не просто найти средние значения и ошибки по группам показателей, но и выявить статистические и биологические закономерности, объективно объясняющие те или иные процессы, влияющие на качество и пищевую безопасность продукции. Решить данную задачу призван корреляционный и дисперсионный анализ изучаемых параметров.

Рассмотрим пример вычисления корреляции прямым (или длинным) методом без разбивки вариант на классы. Данный способ обычно используется при биометрической обработке малых выборок ($n \leq 30$). Коэффициент корреляции (r) вычисляется по формуле

$$r = \frac{C_1 + C_2 + C_d}{2\sqrt{C_1 C_2}}, \quad (1)$$

где C_1 и C_2 – дисперсии по первому и второму признаку (или показателю V), а C_d – дисперсия по ряду разностей (d). C_1 и C_2 вычисляются по общей формуле

$$C = \sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{n}. \quad (2)$$

Дисперсия по ряду разностей вычисляется по формуле

$$C_d = \sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}. \quad (3)$$

Исходя из того, что выборка малая, ошибку коэффициента корреляции (m_r) вычисляем по формуле

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}. \quad (4)$$

Число степеней свободы (ν) для малой выборки будет рассчитываться по формуле

$$\nu = n - 2. \quad (5)$$

Достоверность разности считаем через критерий t_r по формуле

$$t_r = \frac{r}{m_r}. \quad (6)$$

Чтобы не вдаваться в подробную методику, так как она даётся в источниках [1, 2], приведём пример, как мы рассчитывали коэффициент корреляции прямым способом для бактериальной обсеменённости по показателю количества мезофильных аэробных и факультативно-анаэробных микроорганизмов (КМАФАнМ) и температуры в толще мышц тушек цыплят-бройлеров 1 сорта после охлаждения. Исходные данные свели в расчётные таблицы 1 и 2.

Таблица 1. Исходные данные и результаты расчётов по ряду разностей

V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	$d = V_2 - V_1$	d^2
2	359	4	128881	357	127449
2	325	4	105625	323	104329
3	489	9	239121	489	236196
1	281	1	78961	280	78400
2	396	4	156816	394	155236

За V_1 принимаем данные измерений температуры в толще мышц (в °С), а V_2 – данные КМАФАнМ (в КОЕ/см³).

Подставляя найденные в табл. 1–2 значения в формулы (1), (4) и (6), получаем $r = +0,93$; $m_r = 0,21$ и $t_r = 4,39$. Как видим, корреляционная связь между температурой в толще мышц и общей бактериальной обсеменённостью мяса очень сильная ($0,7 \leq r \leq 1,0$). Находим по таблице Стьюдента при $\nu = 3$ критическое значение t_{st} , которое меньше или равно нашему расчётному

показателю 4,39, чтобы оценить достоверность полученного коэффициента корреляции. В нашем случае $t_r < 5,84$, но больше, чем 3,18, что соответствует первому порогу достоверности ($P > 0,95$).

Таблица 2. Результаты расчётов дисперсий по 1-му и 2-му признакам и ряду разностей

Показатели	Температура	КМАФАНМ	Разность
$\sum V$	10	1850	$1850 - 10 = 1840$
$(\sum V)^2$	100	3422500	$1840^2 = 3385600$
$\frac{(\sum V)^2}{n}$	20	684500	$3385600 / 5 = 677120$
$\sum V^2$	22	709404	$\sum d^2 = 701610$
$C = \sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{n}$	2	24904	$C_d = 701610 - 677120 = 24490$

Также в качестве непараметрического способа вычисления коэффициента корреляции в небольших выборках применяется ранговый метод. Он предполагает ранжирование вариант, то есть распределение их в возрастающем или убывающем порядке так, чтобы каждая варианта занимала в общем строю своё место. Данный метод в сравнении с предыдущим является более простым и чаще может применяться в решении практических задач.

Коэффициент ранговой корреляции, или ранговый коэффициент (ρ) определяется по формуле Ч. Спирмена

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}. \quad (7)$$

Ошибка рангового коэффициента (m_ρ) вычисляется по формуле

$$m_\rho = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n - 1}}. \quad (8)$$

Сама методика описана в источнике [2]. Мы приведём пример вычисления рангового коэффициента корреляции для выявления статистически значимой связи между показателями КМАФАНМ и массовой долей жира (МДЖ) мяса цыплят-бройлеров. Исходные данные и расчёт промежуточных показателей приведены в табл. 3.

Подставляя значения табл. 3 в формулы (7) и (8), получаем $\rho = -0,586$ и $m_\rho = 0,175$. Ранговый коэффициент получился средней силы и отрицательным что указывает на обратную связь между общей бактериальной обсеменённостью мяса и массовой долей жира в нём. Достоверность полученных результатов рассчитывается по той же методике, что и ранее (см.

предыдущий пример). Получаем, что коэффициент ранговой корреляции достоверен по второму порогу (при $P > 0,99$).

Таблица 3. Исходные данные и результаты расчётов разностей рангов

№ п/п	МДЖ (x)	КМАФАНМ (y)	Ранги рядов		d = x - y	d ²
			x	y		
1	1,65	7275	1	14	-13	169
2	2,15	7890	2	15	-13	169
3	2,28	6995	3	12	-9	81
4	2,74	5580	4	11	-7	49
5	3,18	7250	6	13	-7	49
6	4,25	281	6	1	5	25
7	4,57	359	6	4	2	4
8	4,75	489	8	8	0	0
9	4,93	492	9	9	0	0
10	5,98	325	10	2	8	64
11	6,38	396	11	5	6	36
12	8,25	551	12	10	2	4
13	8,78	450	13	7	6	36
14	9,35	358	14	3	11	121
15	9,45	399	15	6	9	81
$\sum d^2$	-	-	-	-	-	888

Возникает вопрос о том, насколько оба приведённых выше метода согласуются друг с другом и не дают ли противоречивые результаты. Для этого были проведены расчёты корреляции температуры в толще мышц после охлаждения мяса цыплят-бройлеров и КМАФАНМ этих образцов, а также массовой доли белка и жира с КМАФАНМ в продуктах ранговым методом и прямым способом. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4. Корреляции показателей образцов охлаждённого мяса (n=15)

Сравниваемые группы показателей	Корреляция, рассчитанная:	
	прямым способом	ранговым методом
1. Температура – КМАФАНМ	+0,777***	+0,649***
2. Содержание белка – КМАФАНМ	+0,131	+0,032
3. Содержание жира – КМАФАНМ	-0,769***	-0,586**

Примечание: ** корреляция достоверна при $P \geq 0,99$;

*** корреляция достоверна при $P \geq 0,999$.

Как видим, результаты вычислений получились схожими: сила, направление корреляции и достоверность полученных расчётов. Выявленная разность в коэффициентах корреляций свидетельствует лишь о различии самой конструкции методов, а не о технических или случайных ошибках опыта, поэтому считаем возможным использование этих методов в малых выборках для исследований качества и безопасности пищевой продукции.

Конечно же, в электронных таблицах «Microsoft Excel» можно выполнять те же самые расчёты и строить графические зависимости одних признаков (показателей) от других, а также для большей показательности выводить линии тренда. Например, графическая зависимость общей бактериальной обсеменённости от температуры в толще мышц после охлаждения, а также линия и уравнение линии тренда приведены на рис. 1.

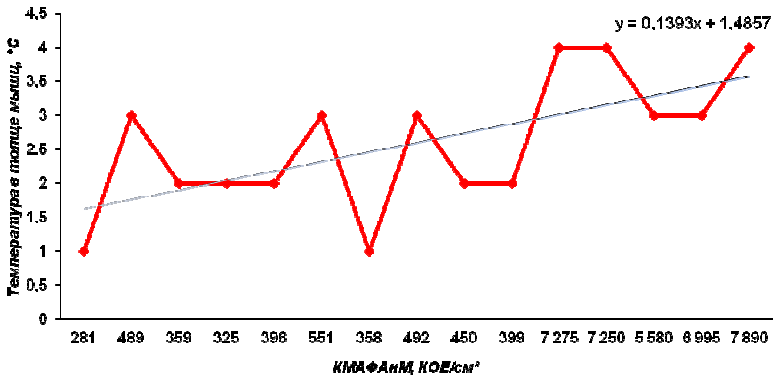


Рис. 1. Зависимость показателя КМАФАнМ от температуры в толще мышц после охлаждения образцов

На рисунке прекрасно видно как при изменении температуры изменяется и бактериальная обсеменённость образцов мяса птицы: чем выше температура после охлаждения в толще мышц, тем выше вероятность размножения в них микробов, что подтверждается высокой достоверностью полученных результатов ($P \geq 0,999$).

Остальные же приведённые в табл. 4 корреляции объясняются следующим образом.

Во-первых, корреляция содержания белка в образцах и КМАФАнМ оказалась слабой положительной и не достоверной. Положительная корреляция, хотя и слабая, объясняется тем, что белок – это хороший субстрат для развития микроорганизмов, а также в свежем продукте.

Во-вторых, корреляционная связь массовой доли жира в образцах и КМАФАнМ оказалась, напротив, средняя отрицательной и статистически

высоко достоверной ($P \geq 0,99 - 0,999$). Это можно объяснить, предположив, что чем больше содержание жира в продукте, тем меньше в нём содержание влаги, так как эта зависимость является закономерной, а, соответственно, чем меньше влаги, тем складываются менее благоприятные условия для развития микрофлоры в продукте. Однако стоит помнить, что такая зависимость может сохраняться только пока продукт свежий. Затем, по мере его хранения, жиры в мясе начинают распадаться на жирные кислоты, и снижается рН продукта, что, в свою очередь, вызывает быстрое развитие микрофлоры.

Для биометрической обработки данных в больших выборках или генеральных совокупностях и для быстроты расчётов лучше пользоваться подключением функции в «Microsoft Excel» пакета «Анализ данных» описательной статистики.

Например, рассчитывая, таким образом, корреляции между высотой воздушной камеры (пуги) пищевых яиц и их общей бактериальной обсеменённостью (КМАФАнМ) в разрезе разных категорий и в зависимости от срока хранения, мы получили следующие результаты (табл. 5).

Таблица 5. Корреляции между высотой воздушной камеры и КМАФАнМ разных категорий пищевых яиц ($n_{\text{общ.}} = 125$)

Категории пищевых яиц	$r \pm m_r$
<i>Диетические яйца</i>	
1. Высшая категория	+0,21±0,20*
2. Отборная категория	+0,16±0,21
3. Первая категория	+0,09±0,21
4. Вторая категория	+0,02±0,19
<i>Столловые яйца</i>	
1. Высшая категория	+0,29±0,20*
2. Отборная категория	+0,22±0,21
3. Первая категория	+0,13±0,20
4. Вторая категория	+0,07±0,21

Примечание: * корреляция достоверная при $P \geq 0,95$.

Как видим, по обеим группам пищевых яиц получились схожие результаты: корреляционная связь показателей общей бактериальной обсеменённости продуктов и высоты пуги оказалась слабой, но положительной, что свидетельствует о закономерной тенденции.

В подобных исследованиях мы считаем необходимым применение также и хотя бы однофакторного дисперсионного анализа. Методика рас-

чёта приведена в источниках [1, 2]. В нашем примере мы покажем результаты таких расчётов в электронных таблицах «Microsoft Excel» при помощи пакета «Анализ данных» описательной статистики.

Исходными данными служили те же показатели что и в предыдущем примере с корреляциями – высота пуги и показатели КМАФАНМ пищевых яиц, но в этом случае мы не будем изучать связь между категориями, а только в зависимости от сроков хранения, что является методически более верным, а именно долю влияния учтённого фактора – высоты пуги – на бактериальную обсеменённость пищевых яиц.

Были получены следующие результаты. У диетических яиц доля влияния учтённого фактора составила всего 35,35 %, а доля влияния неучтённых факторов (которыми могут быть микроповреждения скорлупы и подскорлупных оболочек, содержание лизоцима и т. д.) – 64,65 %. По столовому яйцу: доля влияния учтённого фактора оказалась равной 20,34 %, а доля влияния неучтённых факторов – 79,66 %. Что подтверждает ранее полученные результаты по корреляционным связям этих параметров и биологическую закономерность: чем дольше хранятся яйца, тем больше увеличивается размер пуги, а вместе с тем снижается активность лизоцима в белке яиц, что, в свою очередь, создаёт благоприятные условия для развития микрофлоры внутри продукта.

Таким образом, методы комплексного статистического научного анализа показателей качества и безопасности пищевой продукции могут применяться, и были успешно использованы при написании выпускных квалификационных работ студентами по ветеринарно-санитарной экспертизе. Все работы имели научно-практическую значимость и, являясь законченными разработками, решали прикладные задачи в области ветеринарии, что является, несомненно, важным фактором повышения качества и безопасности пищевой продукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меркурьева Е.К. Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных М.: Колос, 1970, 424 с.
2. Лакин Г.Ф. Биометрия: учебник. М.: Высшая школа, 1990. 352 с.

УДК 51.004

А. Н. Жаров

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru

ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ТЕМЫ: АЛГОРИТМ ШИФРОВАНИЯ RSA

Рассмотрены особенности изложения темы: шифрование данных алгоритмом RSA. Указывается на важность изложения материала, посвященного делимости чисел и сравнения чисел по модулю.

Ключевые слова: коды, криптостойкость, закрытый ключ, открытый ключ, секретное кодирование.

A. N. Zharov

*Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu.ru*

ABOUT THE PRESENTATION OF THE THEME: RSA ENCRYPTION ALGORITHM

It is examined the specific features of studying the topic: RSA encryption algorithm. We point to the importance of presentation material on the divisibility of numbers and comparing the number's modulo.

Keywords: codes, cryptographic strength, private key, public key, secret coding.

Алгоритм шифрования RSA с открытым ключом предложили три автора: Rivest, Shamir, Adleman. По первым трем буквам фамилий авторов шифр получил своё название. Данный алгоритм основан на свойствах делимости простых чисел.

Дадим определения, сформулируем теоремы и свойства, которые потребуются при изложении данной темы [1].

Определение 1. Натуральное число p называется *простым*, если оно больше 1 и не имеет положительных делителей, отличных от 1 и p .

Определение 2. Натуральное число n называется *составным*, если оно больше 1 и имеет по крайней мере один положительный делитель, отличный от 1 и n .

При поиске простых чисел полезной является теорема:

Теорема 1. Если натуральное число n - составное, а p - наименьший его простой делитель, то $p \leq \sqrt{n}$.

Из данной теоремы следует, что если число n не делится ни на одно простое число, не превосходящее \sqrt{n} , то n – простое; в противном случае n – составное. Например, число 41 простое, так как не делится на простые числа $\leq \sqrt{41}$, то есть 2, 3, 5. Исходя из определения 1 и теоремы 1, можно сформировать ряд простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... Однако вычисление больших простых чисел таким способом трудоёмко даже для быстродействующих компьютеров. Отсутствие быстрого алгоритма поиска простых чисел является основным гарантом криптостойкости алгоритма шифрования RSA.

Определение 3. Числа a и b называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1, т.е. $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Например, числа 40 и 67 взаимно простые, а числа 40 и 66 нет, так как $\text{НОД}(40, 66) = 2$.

Определение 4. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ – это количество положительных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n .

Например, если $n = 12$, то $\varphi(12) = 4$, так как числами взаимно простыми с 12 являются 1, 5, 7, 11, а их количество равно четырём.

Для вычисления функции Эйлера удобно пользоваться свойствами:

- 1) если $n = p$ – простое число, то $\varphi(p) = p - 1$;
- 2) если m и n – взаимно простые, то $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Определение 5. Два числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n , если разность $a - b$ делится на n . Записывается это так:

$$a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow (a - b) : n$$

Отметим простейшие свойства сравнений:

1) если два целых числа a и b при делении на n дают равные остатки, то они сравнимы по данному модулю n , т.е. $a \equiv b \pmod{n}$;

2) всякое целое число a сравнимо с остатком r , получающимся при делении его на n , т.е. $a \equiv r \pmod{n}$;

3) члены сравнения можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком;

4) в сравнении по модулю n отдельные слагаемые и множители можно заменить числами, сравнимыми по тому же модулю n .

Рассмотрим алгоритм создания открытого и секретного ключей:

1) случайным образом выбираются два различных простых числа p, q ;

2) вычисляется их произведение $n = p \cdot q$, которое называется модулем;

3) вычисляется значение функции Эйлера $\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)$;

4) случайным образом выбирается целое число e , взаимно простое с $\varphi(n)$ из интервала $1 < e < \varphi(n)$;

5) вычисляется число d такое, что $d \cdot e = 1 \pmod{\varphi(n)}$.

Пара чисел $\{e, n\}$ называется открытым ключом, а числа $\{d, n\}$ называются закрытым ключом. Открытый ключ может быть известен всем пользователям. Закрытый же ключ хранится в секрете.

Алгоритм шифрования и дешифровки выглядит следующим образом (рис. 1). Допустим, Иван хочет послать Маше зашифрованное сообщение так, чтобы при этом использовать открытые каналы связи, например интернет. Сообщение Ивана в этом случае будет доступно всем пользователям сети. Чтобы правильно дешифровать это сообщение могла только Маша, она должна сгенерировать открытый $\{e, n\}$ и закрытый $\{d, n\}$ ключ. Открытый ключ $\{e, n\}$ передать Ивану, а закрытый ключ $\{d, n\}$ должна держать от всех в секрете. Иван должен представить текст своего сообщения в числовом виде, например как последовательность чисел $m_1 m_2 \dots m_k$, каждое из которых удовлетворяет неравенству $0 \leq m_i \leq n - 1$. С помощью открытого ключа Маши Иван шифрует сообщение $c_i \equiv m_i^e \pmod{n}$. И в открытую сеть интернет передаёт сообщение для Маши в виде $c_1 c_2 \dots c_k$. У Маши имеется её секретный ключ, с помощью которого она дешифрует сообщение $m_i \equiv c_i^d \pmod{n}$ и получит его в виде последовательности чисел $m_1 m_2 \dots m_k$, которые и передал ей Иван. Таким образом, хотя сообщение Ивана будет доступно в сети каждому пользователю, правильно дешифровать его сможет только Маша, так как только у неё есть секретный ключ.

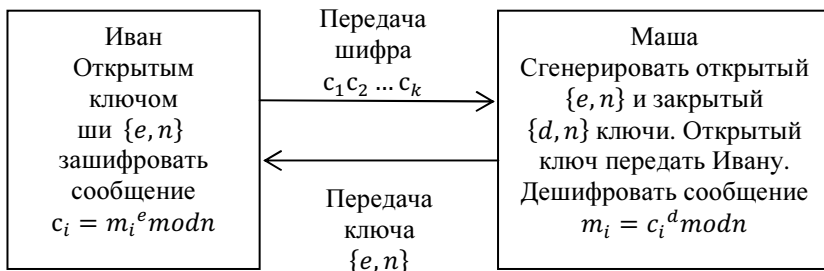


Рис.1. Схема шифрования, передачи и дешифровки данных по алгоритму RSA

Рассмотрим пример действий Ивана и Маши. Действия Маши по генерации ключей:

- 1) придумать два простых числа: $p = 7$ и $q = 11$;
- 2) вычислить модуль сравнения: $n = p \cdot q = 7 \cdot 11 = 77$;
- 3) вычислить функцию Эйлера: $\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1) = 6 \cdot 10 = 60$;
- 4) выбрать целое число e , взаимно простое: с $\varphi(n) = 60$ из интервала $1 < e < 60$, например $e = 13$;

5) вычислить число d такое, что $d \cdot 13 \equiv 1 \pmod{60}$. Для этого решить диофантово уравнение $d \cdot 13 - 60 \cdot y = 1$.

По алгоритму Евклида $60 = 13 \cdot 4 + 8$; $\rightarrow 8 = 60 - 13 \cdot 4$;

$$13 = 8 \cdot 1 + 5; \quad \rightarrow \quad 5 = 13 - 8;$$

$$8 = 5 \cdot 1 + 3; \quad \rightarrow \quad 3 = 8 - 5;$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2; \quad \rightarrow \quad 2 = 5 - 3;$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1; \quad \rightarrow \quad 1 = 3 - 2.$$

Из полученных равенств найдём

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 3 \cdot 2 - 5 = (8 - 5) \cdot 2 - 5 = \\ &= 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 8 \cdot 2 - (13 - 8) \cdot 3 = 8 \cdot 5 - 13 \cdot 3 = \\ &= (60 - 13 \cdot 4) \cdot 5 - 13 \cdot 3 = (-23) \cdot 13 - 60 \cdot (-5). \end{aligned}$$

Решение диофантова уравнения имеет вид

$$\begin{cases} d = -23 + 60 \cdot k; \\ y = -5 + 13 \cdot k; \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При $k = 1$ $d = 37$.

Таким образом, открытый ключ $\{e = 13, n = 77\}$, а закрытый $\{d = 37, n = 77\}$. Затем открытый ключ передаётся Ивану.

Допустим Ивану нужно передать для Машипин код пластиковой карты 15 57. С помощью открытого ключа Иван шифрует его

$$\begin{aligned} c_1 &\equiv 15^{13} \equiv 225^6 \cdot 15 \equiv 71^6 \cdot 15 \equiv 5041^3 \cdot 15 \equiv 36^3 \cdot 15 \equiv \\ &\equiv 1296 \cdot 540 \equiv 64 \cdot 1 \equiv 64 \pmod{77}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &\equiv 57^{13} \equiv 3249^6 \cdot 57 \equiv 15^6 \cdot 57 \equiv 225^3 \cdot 57 \equiv 71^3 \cdot 57 \equiv \\ &\equiv 5041 \cdot 4047 \equiv 36 \cdot 43 \equiv 8 \pmod{77}. \end{aligned}$$

Зашифрованное сообщение 64 8 Иван передаёт Маше по открытому каналу связи. Маша, получив сообщение от Ивана, дешифрует его

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv 64^{37} \equiv 4096^{18} \cdot 64 \equiv 15^{18} \cdot 64 \equiv 225^9 \cdot 64 \equiv 71^9 \cdot 64 \equiv \\ &\equiv 5041^4 \cdot 4544 \equiv 36^4 \cdot 1 \equiv 1296^2 \equiv 64^2 \equiv 4096 \equiv 15 \pmod{77}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &\equiv 8^{37} \equiv 4096^9 \cdot 8 \equiv 15^9 \cdot 8 \equiv 225^4 \cdot 120 \equiv 71^4 \cdot 43 \equiv \\ &\equiv 5041^2 \cdot 43 \equiv 36^2 \cdot 43 \equiv 55728 \equiv 57 \pmod{77}. \end{aligned}$$

После дешифровки Маша получает правильный пин код пластиковой карты 15 57.

Если числа p и q будут выбраны большими, например 2048-битными, то, зная открытый ключ $\{e = 13, n = 77\}$, практически невозможно определить закрытый ключ, что и определяет криптостойкость данного кода [2].

Алгоритм шифрования данных на основе RSA можно использовать также для цифровой подписи, которая служит аналогом рукописной подписи человека, то есть служит для идентификации личности. Предположим, что Маша является бухгалтером и хочет в электронном виде сдать бухгалтерскую отчетность. Иван является работником налоговой инспекции, который принимает отчетность в электронном виде по электронной

почте. Иван должен быть уверен, что данный отчет ему прислала Маша, а не кто-то другой. Для этого Маша должна иметь цифровую подпись. Последовательность действий в этом случае должна быть следующей. Маша формирует открытый $\{e, n\}$ и закрытый $\{d, n\}$ ключи. Открытый ключ $\{e, n\}$ пересылает Ивану. Закрытый ключ $\{d, n\}$ держит в секрете от всех. Затем Маша шифрует какое-либо случайное сообщение $m_1 m_2 \dots m_k$ своим закрытым ключом $c_i \equiv m_i^d \pmod{n}$. Открытое сообщение $m_1 m_2 \dots m_k$ и зашифрованное $c_1 c_2 \dots c_k$ Маша передаёт Ивану. Данная ситуация показана на рис. 2.

Иван для идентификации Маши дешифрует сообщение открытым ключом $\tilde{m}_i \equiv c_i^e \pmod{n}$. Если сообщения, присланное Машей и дешифрованное Иваном, совпадают $m_1 m_2 \dots m_k = \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \dots \tilde{m}_k$, то это гарантирует, что данный бухгалтерский отчёт предоставлен именно Машей.

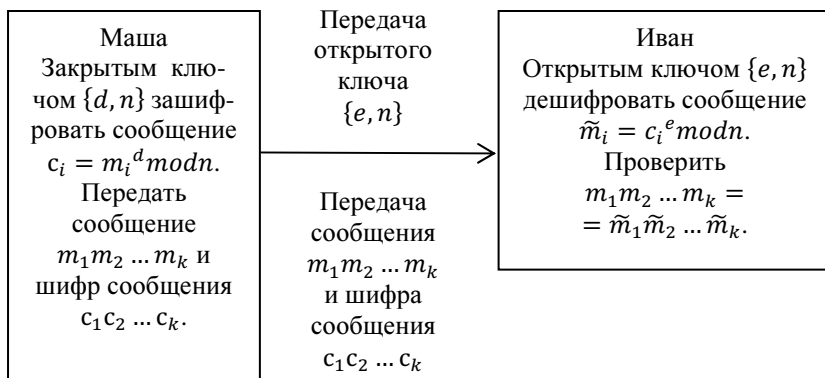


Рис. 2. Схема создания цифровой подписи на основе алгоритма RSA

Рассмотрим алгоритм создания цифровой подписи на конкретном примере. Маша формирует открытый $\{e = 13, n = 77\}$ и закрытый $\{d = 37, n = 77\}$ ключи. Открытый ключ $\{e = 13, n = 77\}$ передаёт Ивану. Случайным образом формирует сообщение 24 42 и шифрует его закрытым ключом

$$\begin{aligned}
 c_1 &\equiv 24^{37} \equiv 576^{18} \cdot 24 \equiv 37^{18} \cdot 24 \equiv 1369^9 \cdot 24 \equiv 60^9 \cdot 24 \equiv \\
 &\equiv 3600^4 \cdot 1440 \equiv 58^4 \cdot 54 \equiv 3364^2 \cdot 54 \equiv 53^2 \cdot 54 \equiv \\
 &\equiv 151686 \equiv 73 \pmod{77}; \\
 c_2 &\equiv 42^{37} \equiv 1764^{18} \cdot 42 \equiv 70^{18} \cdot 42 \equiv 4900^9 \cdot 42 \equiv 49^9 \cdot 42 \equiv \\
 &\equiv 2401^4 \cdot 2058 \equiv 14^4 \cdot 56 \equiv 196^2 \cdot 56 \equiv 42^2 \cdot 56 \equiv \\
 &\equiv 98784 \equiv 70 \pmod{77}.
 \end{aligned}$$

Передаёт Ивану сообщение $m_1 m_2 = 24\ 42$ и шифр сообщения $c_1 c_2 = 73\ 70$. Иван открытым ключом $\{e = 13, n = 77\}$ дешифрует сообщение Маши

$$\begin{aligned}\tilde{m}_1 &\equiv 73^{13} \equiv 5329^6 \cdot 73 \equiv 16^6 \cdot 73 \equiv 256^3 \cdot 73 \equiv 25^3 \cdot 73 \equiv \\ &\equiv 625 \cdot 1825 \equiv 9 \cdot 54 \equiv 486 \equiv 24 \pmod{77}; \\ \tilde{m}_2 &\equiv 70^{13} \equiv 4900^6 \cdot 70 \equiv 49^6 \cdot 70 \equiv 2401^3 \cdot 70 \equiv 14^3 \cdot 70 \equiv \\ &\equiv 196 \cdot 980 \equiv 42 \cdot 56 \equiv 2352 \equiv 42 \pmod{77}.\end{aligned}$$

Так как сообщения $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = m_1 m_2 = 24\ 42$ совпадают, то этот факт гарантирует, что сообщение получено от Маши.

Рассмотренный алгоритм шифрования RSA и алгоритм создания цифровой подписи обычно реализуется на ЭВМ с использованием специализированных компьютерных программ, по рассмотренным выше алгоритмам. Использование ЭВМ определяется тем, что модуль сравнения n должен быть очень большим числом. На момент написания данной статьи актуальными являются RSA – 1024 и RSA – 2048, в которых модуль сравнения выбирается соответственно в 1024 бита (n содержит 309 десятичных знаков) и 2048 бит (n содержит 617 десятичных знаков). За факторизацию этих чисел объявлены денежные призы в 100000 и 200000 долларов США. Коды RSA с меньшим количеством бит удается факторизовать методом *квадратичного решета* или методом *решета числового поля*. Взлом кодов RSA имеет широкую историю. В 1991 году взломан RSA с модулем n , содержащим 100 десятичных знаков, в 1992 – 110 знаков, 1993 – 120 знаков, 1999 – 170 знаков, 2010 – 180 знаков, 2013 – 210 знаков, 2016 – 220 знаков.

Таким образом, при изложении темы шифрование кодом RSA слушатели должны иметь хорошие знания в области простых и составных чисел, знать алгоритм Евклида, а также должны уметь находить сравнения, функции Эйлера и решать диофантовы уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие / под ред. Н.Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1984. 192 с.
2. Шаньгин В.Ф. Комплексная защита информации в корпоративных сетях: учебное пособие. М.: ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2010. 592 с.

УДК 519.6

О. К. Иванова, Е. А. Яновская, Ю. А. Виноградова

Московский государственный технологический университет «Станкин»
Россия, г. Москва, e-mail: oksivgor@mail.ru, elena_yanovskaya@bk.ru,
yulich@inbox.ru

ВЛИЯНИЕ СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД НА ФОРМИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО- КОММУНИКАЦИОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Работа посвящена анализу особенностей влияния математических студенческих олимпиад на восприятие студентами нового учебного материала, на развитие новых подходов и методов при решении технических и технологических задач в рамках реализации новых современных образовательных стандартов ФГОС 3+.

Ключевые слова: Студенческие олимпиады, олимпиады по математике, создание математических моделей, технические и технологические задачи.

O. K. Ivanova, E. A. Yanovskaya, Y. A. Vinogradova

*Moscow State Technological University "STANKIN"
Russia, Moscow, e-mail: oksivgor@mail.ru, elena_yanovskaya@bk.ru,
yulich@inbox.ru*

THE INFLUENCE OF STUDENT'S MATHEMATICAL OLYMPIADS ON THE FORMATION OF INFORMATION AND COMMUNICATION EDUCATIONAL ENVIRONMENT

The paper analyzes the features of the influence of mathematical student contests on the perception of the new educational material by the students for the development of new approaches and methods in solving technical and technological problems in the implementation of new modern educational standards FSES 3+.

Keywords: Student Olympiad, Mathematics Olympiad, the creation of mathematical models, technical and technological problems.

В современных условиях вся система образования должна быть направлена на освоение необходимых компетенций, определенных в новом ФГОС ВО. В связи с введением новых требований к высшему образованию в России возникает необходимость широкого использования в образовательном процессе современного информационно-коммуникационной

образовательной среды, которая существенно расширяет возможности вуза при подготовке специалистов в различных областях. Подготовка и проведение студенческих олимпиад и конкурсов по различным предметам является необходимым условием для успешной реализации данного проекта и пробуждает интерес у студентов к изучаемым дисциплинам, помогает выявлять наиболее квалифицированных выпускников вузов, наиболее востребованных на современном рынке труда.

При подготовке к олимпиадам студенты получают возможность развивать навыки ясного понимания изученного материала и нестандартного мышления, а также отбирать и сортировать материал по степени его важности для решения поставленных задач и формулирования современных проблем, возникающих в различных отраслях науки и техники. Полученные во время подобной подготовки навыки впоследствии дают возможность учащимся продолжать совершенствоваться в определенной области, что увеличивает стимул к профессиональному развитию. Как правило, олимпиады предоставляют для студентов возможность в полной мере оценить практическое применение теоретических знаний и математических методов решений сложных нестандартных задач, которые предлагаются им в качестве олимпиадных заданий. Многогранность и ориентированность на различные темы математических и технических олимпиад дает возможность каждому студенту выбрать свою сферу интересов и совершенствоваться именно в ней. Если сравнить знания студента-участника олимпиад и студента, который получил их только во время занятий, мы увидим большую разницу как в объеме полученных знаний, так и в возможностях реализации творческого потенциала каждого конкретного студента. Победители, призеры и участники олимпиад, помимо более глубоких знаний теории, имеют опыт применения практических навыков в сложной, а порой и весьма нестандартной ситуации, которая может возникнуть в реализации лабораторных работ или во время производственной практики. Нередко, после участия в математических и технико-технологических олимпиадах, студенты могут решать задачи, которые до того были им не по силам, а опыт, приобретенный во время олимпиад, помогает справиться со сложностями в освоении учебного материала и в дальнейшей практической и производственной деятельности.

Познавательная деятельность в процессе решения нестандартных, сложных задач имеет весьма широкие границы: от сбора информации и проведения эксперимента до теоретических обоснований результатов в технических науках. Решение любых задач в математике, в том числе олимпиадных, обладает одним из самых главных преимуществ – возможностью моделировать процесс мышления, формализовать способ решения, иметь акт эксперимента в виде решения, представленного самим учащимся.

Предлагаемые студентам на олимпиадах задачи носят обычно весьма непростой характер и требуют от участников как прочных знаний по программе, так и более творческого подхода к решению предложенных задач. Задачи, которые предлагаются студентам на таких конкурсах, как правило, иллюстрируют в упрощенной форме математические модели технологических процессов, которые могут быть использованы при решении реальных технических и технологических задач в тяжелом машиностроении.

Для подготовки команды студентов к олимпиадам и конкурсам различного уровня и более углубленного изучения программного материала в университете ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» работает семинар по математическому анализу «Углубленные методы математического и функционального анализа в применении к решению технических и технологических задач». Также работает семинар «Специальные главы линейной алгебры и аналитической геометрии» (для студентов младших курсов) и факультатив по специальным главам математического моделирования технико-технологических процессов (для бакалавров и магистров). Целями работы с одаренными студентами можно считать выявление в студенческом сообществе особо одаренных учащихся, способных заниматься в дальнейшем научной и педагогической деятельностью. Такие студенты впоследствии могут стать ведущими научными сотрудниками различных научных лабораторий и творческих коллективов, способных решать новые актуальные задачи для дальнейшего развития технического и технологического потенциала нашей страны [2].

В 2014 и 2015 годах на олимпиадах по математике для студентов ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» были предложены, среди прочих, следующие задачи.

1. Формула для кинетической энергии релятивистской частицы массой m , движущейся со скоростью v , имеет вид $K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$. По-

кажите, что для скоростей, много меньших скорости света ($v/c \rightarrow 0$), эта формула переходит в классическое выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

2. Согласно модели расширяющейся Вселенной скорость, с которой галактики удаляются друг от друга ($v = dr/dt$), пропорциональна расстоянию r между ними с коэффициентом пропорциональности H (постоянная Хаббла). Считая, что в момент времени t_0 расстояние между двумя галактиками r_0 , найдите расстояние между ними в момент времени t .

3. Маленькая капля воды объемом V_0 падает с большой высоты в сухом воздухе и интенсивно испаряется. Считая скорость испарения капли пропорциональной площади ее поверхности (коэффициент пропорциональности $\gamma > 0$), определите, через какое время капля испарится? Каплю можно считать сферической.

4. В питательном растворе находится культура из 100 бактерий. Считая, что бактерии делятся в среднем каждые 20 мин и за это же время, не успев поделиться, погибает 40 бактерий, определите количество данной культуры через 4 ч.

5. В регионе в 2015 г. в течение каждого месяца $x\%$ безработных находили работу, а $y\%$ теряли работу и становились безработными. Числа x и y не менялись на протяжении всего года. На 1 января уровень безработицы составил 40%, на 1 февраля – 29%, на 1 апреля – 18,44%. На сколько процентов сократилась численность безработных за период с 1 февраля по 1 марта?

6. Проверьте правильность поговорки «растет как снежный ком». Маленький снежный шарик объемом V_0 начинает скатываться с горы, покрытой тающим снегом. Считая, что скорость нарастания объема снежного комка пропорциональна площади его поверхности (коэффициент пропорциональности $\gamma > 0$), найдите объем снежного кома через время t после начала движения. Для простоты снежный ком можно считать шаром.

7. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной A руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости (коэффициент пропорциональности равен k). При какой постоянной скорости v плавание судна будет наиболее экономичным [3]?

Акцентируя внимание на необходимости изучения математики в связке с потребностями жизни, мы способствуем установлению у учащихся новых научных и практических взглядов. Использование прикладных задач для мотивации получения математических знаний создает условия для реализации компетентностного подхода в преподавании, в результате которого учащийся сможет в будущей профессиональной деятельности из всех приобретенных знаний, умений и навыков выбрать те, которые необходимы для решения встающих перед ним практических задач.

В рамках реализации современных образовательных стандартов ФГОС ВО (3+) разрабатываются новые рабочие программы дисциплин, в том числе по математическим дисциплинам, которые преподаются на всех курсах ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Работа с хорошо подготовленными студентами - участниками математических олимпиад, позволяет обсуждать трудные для восприятия учащейся молодежью вопросы программы по математическим дисциплинам [1]. Такой подход позволяет впоследствии реализовать отработанные методики на плановых занятиях со всеми студентами, даже, порой имеющих изначально слабую школьную подго-

товку. Студенческое олимпиадное движение вносит неопределимый вклад в развитие математического образования в России, так как повышает интерес молодежи к избранному техническому и технологическому образованию, которое основано на методах математического моделирования, повышает возможности повышения квалификационной подготовки во время обучения и непосредственно во время работы после получения бакалаврского или магистерского диплома.

Как видим, важность наличия в вузе студенческих математических олимпиад обоснована общими целями образования. Их проведение оказывает существенное положительное влияние на интеллектуальное развитие студента, на результаты его обучения в вузе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Студенческие математические олимпиады в рамках сотрудничества между ФГБОУ ВПО «СТАНКИН» и МТЛ 1501 / О.К. Иванова, Е.А. Яновская, Е.Н. Сосенушкин, И.Н. Харьбина, Н.В. Ромашкина // Сб. XXIII Междунар. конф. «Математика, компьютер, образование». Москва–Ижевск: АНО НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. С. 320.
2. *Иванова О. К.* Влияние математических студенческих олимпиад на восприятие учебного материала и формирование нестандартного мышления для решения технологических задач [Электронный ресурс] // Науч.-метод. журн. «Наука и образование: новое время». 2016. №5. Режим доступа: <http://articulus-info.ru/category/vysshee-obrazovanie/?tag=5-sentyabr-oktyabr-2016-g>
3. Математические олимпиады для студентов вузов: учебное пособие / И.В. Иванов, О.К. Иванова, О.А. Окунева, Н.А. Толченникова. М.: ИЦ ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2015.

УДК 517.1

А. Б. Капранова, М. Ю. Таршис

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: kapranova_anna@mail.ru

ОБ ОСНОВНЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе проанализированы основные свойства математических моделей, в том числе относящихся к области химических технологий; рассмотрены условная классификация методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и общие принципы построения их приближенного решения.

Ключевые слова: модель, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, методы приближенного решения.

A. B. Kapranova, M. U. Tarshis

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: kapranova_anna@mail.ru

ABOUT THE BASIC METHODS OF APPROXIMATE SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

This paper analyzes the basic properties of mathematical models, including those relevant to chemical engineering; conditional classification of methods of solutions of the Cauchy problem for ordinary differential equations and the General principles of their approximate solution are discussed.

Keywords: model, ordinary differential equations, the Cauchy problem, methods of approximate solution.

Несмотря на стремительное развитие компьютерно-информационных методик, позволяющих производить не только символьные вычисления в сложнейших задачах, но и получать анимационные представления динамики механических систем, изучение методологии численных решений различных проблем математического моделирования в области химических технологий не теряет своей актуальности [1]. Основная причина – человеческий фактор, т.к. без понимания того, что именно делает «машина», невозможно сформулировать корректно даже начальную постановку задачи, не говоря уже об анализе полученных в «черном ящике» результатов. Предлагаемые рекомендации предназначены для преподавателей и научных работников, творческая деятельность которых связана с решением начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, в том числе относящихся к области химических технологий.

1. Основные свойства математических моделей в области химических технологий. Остановимся на понятии погрешности численных расчетов. Во избежание путаницы между терминами «машинной точности», достигающей порой просто удивительных по своей «минимальности» диапазонов (например, от 10^{-19} до 10^{19}), и «погрешностью результата» для расчета в конкретной практической задаче рассмотрим основные составляющие последнего понятия. Прежде чем предложить «машине» для решения ту или иную задачу, необходимо сформировать соответствующую *математическую модель*, которая должна удовлетворять определенным условиям [2].

К одним из основных свойств математических моделей в области химических технологий можно отнести: *универсальность, точность, адекватность, экономичность*. В частности, свойство универсальности реализуется при отражении исследователем в модели некоторого выделенного признака или нескольких свойств реального объекта. Например, кон-

кретный исследуемый процесс описывается конечным набором функций одной переменной $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$. Второе свойство из перечисленных выше (точность) предполагает наличие относительной погрешности модели для каждого выходного параметра в виде отношения разности между его значениями - модельным и «истинным» к «истинному». Свойство адекватности модели реальному объекту в выделенном интервале изменения внутренних и внешних «воздействий» (переменных) позволяет ограничить погрешность расчетов некоторым заданным значением. Свойство экономичности формируемой модели означает необходимость минимизации трудоемкости выполняемых расчетов. Как правило, указанная трудоемкость оценивается характеристиками, влияющими в дальнейшем на затраты машинного времени и объем используемой оперативной памяти, например, числом внутренних параметров модели, размерностью решаемой при этом системы уравнений и т.п.

Очевидно, что перечисленные критерии носят противоречивый характер по отношению к выбору математической модели и требуют от исследователя компромиссного решения, которое отражается на особенностях формируемого описания с «неустранимой погрешностью», включающей погрешность модели и ее исходных данных. Следующим этапом подготовки задачи к передаче «машине» является *выбор метода решения* в форме замены исходной математической модели некоторой дискретной моделью при удовлетворении *основным требованиям* [2]: *точности и адекватности*. В данном случае точность применяемого метода предполагает наличие относительной «погрешности *дискретизации*», равной отношению разности между решениями для разностной схемы и исходной системы модели к решению исходной задачи. Адекватность метода дискретного представления свойствам исходной математической модели должна соотноситься с условиями: *сходимости, консервативности, корректности и экономичности*. Условие сходимости в данном случае означает, что при возрастании числа разностных уравнений решение соответствующей дискретной системы стремится к решению исходной задачи, например, системы дифференциальных уравнений. Однако на практике это не реализуется ввиду конечности числа решаемых уравнений. Условие консервативности предполагает реализацию такой дискретной модели, которая соответствует дискретным аналогам законов сохранения. Условие корректности означает, с одной стороны, сочетание условий существования, единственности и устойчивости от входных данных для дискретной модели, и, с другой стороны, выполнение требований существования, единственности и непрерывности от входных данных для исходной математической модели. Условие экономичности выбираемого метода решения предполагает оптимальное соотношение между затратами машинного времени и

объемом оперативной памяти, необходимых для вычислительных операций.

Нетрудно заметить, что, так же как и при выборе математической модели, конкретизация метода решения связана с некоторыми противоречиями. Значение «погрешности метода» складывается из относительных показателей «погрешности дискретизации» и «погрешности округления» [2, 3]. Последняя («вычислительная погрешность» или «погрешность округления») является отражением реализации выбранного метода при неизбежных округлениях в ходе расчетов алгоритма. При этом «погрешность дискретизации» должна стремиться к нулю для одного или нескольких параметров алгоритма расчета. Однако это может привести к резкому возрастанию числа разностных уравнений (например, когда шаг сетки выбирается в качестве некоторого критического показателя метода). Итак, общая «погрешность результата» решения практической задачи определяется или равенством сумме погрешностей трех видов – неустранимой, дискретизации и вычислительной, или неравенством, когда данная погрешность не должна превышать сумму оценочных представлений последних.

2. Условная классификация методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем изложении рассматриваются только такие практические задачи, которые связаны с описанием процессов химической технологии (как реальных объектов) и сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) различных порядков (или систем ОДУ). Например, скорость $v(R)$ ламинарного течения «ньютоновской» жидкости в продольном сечении трубы (капилляра) в зависимости от радиуса R является решением задачи Коши с условием $v(R_0) = v_0$. Поиск скорости осаждения твердых частиц в суспензии, как функции от временного параметра, с учетом относительной вязкости среды также приводит к ОДУ с соответствующим начальным условием. Кроме того, целый ряд типичных задач, касающихся расчета порядка реакции химических процессов (как для обратимых, так и для необратимых), связан с решением их дифференциальных кинетических уравнений относительно концентраций реагентов вида $[A]$ с начальным условием $[A]_{t=0} = [A]_0$ [4].

При всем разнообразии изучаемых процессов можно условно выделить следующие возможные варианты постановки задачи для ОДУ:

- задача Коши (начальная задача) для ОДУ 1-го порядка;
- система нескольких ОДУ 1-го порядка (как аналогичное представление одного ОДУ 2-го или более высокого порядков), которая в матричной форме имеет вид ОДУ 1-го порядка;

- краевая задача для ОДУ, допускающая с помощью специальных преобразований переход к задачам 1-го порядка с соответствующими начальными условиями.

Следовательно, достаточным для анализа способов решения практической задачи является рассмотрение первой из перечисленных.

Рассмотрим основные методы решения задачи Коши. Пусть ОДУ 1-го порядка имеет вид

$$dv(t) / dt = \Phi(t, v(t)), \quad (1)$$

и ищется решение $v(t)$, удовлетворяющее начальному условию $v(t_0) = v_0$.

Согласно *теореме Пикара* [5], если функция $\Phi(t, v)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную $\partial\Phi/\partial v$ в области $\Omega : |t - t_0| \leq T, |v - v_0| \leq V$, то на промежутке $[t_0 - q, t_0 + q]$, $q = \min(T; V / N)$, $N = \max_{(t,v) \in \Omega} |\Phi(t, v)|$, существует единственное решение $v(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $v(t_0) = v_0$.

Методы решения задачи Коши. В рамках корректной постановки задачи можно выделить три типа методов приближенного решения указанной проблемы в зависимости от вида представления результата:

- *аналитические* (например, *разложение в степенной ряд* и *метод последовательных приближений Пикара*) с записью ответа в символической форме;

- *графические* (например, *метод ломаных Эйлера* и его модификации – *Эйлера-Коши* и др.), которые позволяют получить приближения не только в виде графиков, но и таблиц, а значит, могут быть отнесены и к *численным* методам;

- *численные* методы выводят результат (*сеточную функцию*) в форме табличных данных [6, 7].

Заметим, что разложение в степенной ряд (первая группа методов), несмотря на возможность оценки остаточного члена, имеет существенный недостаток, относящийся к неравномерности получаемой абсолютной ошибки расчетов, которая возрастает по мере удаления от начальной точки. Однако значимость аналитического решения в сравнении с численным трудно переоценить, т.к. имеется возможность исследования как предельного поведения такого решения, так и качественного характера его поведения при изменении значений начальных условий или параметров модели. В свою очередь, численные методы приводят к описанию только частных решений при задании конкретных значений параметров модели и начальных условий.

Численными методами решения задачи Коши являются следующие [8]:

1. *Явные (экстраполяционные) схемы* – итерационные формулы расчета соответствуют текущему k -значению аргумента t , например, с помощью «формул дифференцирования вперед» (ФДВ):

1.1. *Одно- и двухшаговые* – в расчете последующего значения искомой функции необходима соответственно *только одна* текущая точка или *две* – текущая и вспомогательная (например, вследствие применения усеченного ряда *Тейлора* в текущей точке для «точного» результата), что дает «быстрый старт» поиска приближения задачи *Коши* и возможность изменения в дальнейшем «размера» шага при переходе от одной итерации к другой:

1.1.1. *Одно- и двухэтапные* – выполняется вычисление соответственно *одной* и *двух* вспомогательных функций в зависимости от шага разностной схемы (например, метод *Эйлера* как *одноэтапный метод Рунге-Кутты*; метод *Эйлера-Коши* как *двухэтапный метод Рунге-Кутты*; разложение в ряд *Тейлора*);

1.1.2. *Многоэтапные* – требуется рассчитать несколько дополнительных функциональных зависимостей от «размера» шага (например, в методах *Рунге-Кутты 3-го порядка* их три, а *4-го порядка* – четыре);

1.2. *Многошаговые* – основаны на интегрировании построенной функции аппроксимации, когда при вычислении последующего значения искомой функции требуется *несколько* точек, соответствующих предыдущим итерациям, что существенно затрудняет или приводит к невозможности: изменения «размера» шага для расчетной сетки и «старта» поиска приближенного решения задачи *Коши* (например, *Адамса-Баушфорта*; методы *с сериями шагов*); прогноза и коррекции;

1.3. *Блочные*;

2. *Неявные (интерполяционные) схемы* – итерационные формулы расчета соответствуют последующему $(k+1)$ -значению параметра t , например, посредством «формул дифференцирования назад» (ФДН):

2.1. *Одно- и двухшаговые (Эйлера; метод трапеций; Рунге-Кутты)*;

2.2. *Многошаговые* – базируются на интегрировании построенной функции интерполяции при прочих условиях, аналогичных сформулированным для явных многошаговых схем (например, методы ФДН; *Адамса; Рунге-Кутты*); прогноза и коррекции;

2.3. *Блочные*.

3. Общие принципы построения приближенного решения задачи Коши. Метод *последовательных приближений Пикара*, являющийся отражением доказательства приведенной выше теоремы Пикара, при циклическом применении итерационной формулы

$$v_j(t) = v_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, v_{j-1}(t)) dt, \quad j = 1, 2, \dots, k, \dots, \quad v_0(t) = v_0,$$

приводит к сходящейся последовательности приближенных решений с пределом в форме точного решения $v(t)$ и оценкой погрешности k -го приближения [5-11]

$$|v(t) - v_k(t)| \leq M^k N q^{k+1} / (k+1)! \text{ при } |t - t_0| \leq q,$$

где q и N - те же, что в формулировке теоремы, а $M = \max_{(t,v) \in \Omega} |\partial \Phi(t,v) / \partial v|$.

В соответствии с предложенной условной классификацией численных методов решения ОДУ в задаче Коши остановимся на некоторых общих принципах построения указанных групп. При этом постараемся выделить и основные отличительные особенности перечисленных выше способов.

Например, одним из критериев может быть постоянство или переменность «размера» шага разностной схемы. Очевидно, что изменение шага в сторону его увеличения (или уменьшения) является необходимым в случае незначительных (или существенных) изменений в результатах расчета при переходе от одной итерации к другой. Следовательно, характер данного показателя может отразиться на перечисленных ранее позициях точности, адекватности и экономичности выбранного численного метода для поиска искомого приближения (*сеточной функции*). В частности, применение многошаговых численных методов имеет ряд преимуществ - в экономии объема оперативной компьютерной памяти и в возможности аналитической оценки погрешностей.

Метод ломаных Эйлера предполагает при выборе h -шага и t -интервала $t_j = t_0 + jh$, ($j = 0, 1, 2, \dots$) замену интегральной кривой на отрезке $[t_j; t_{j+1}]$ касательной к ней в точке $A_j(t_j, v_j)$:

$$v_{j+1} = v_j + h\Phi(t_j, v_j), \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Заметим, что вследствие возрастающей погрешности при каждой итерации методом *Эйлера* целесообразно проводить сравнение результатов $v_{j+1,h}$ и $v_{j+1,h/2}$, полученных соответственно при целом (h) и половинном ($h/2$) выбранном шаге, в рамках желаемой погрешности ε :

$$|v_{j+1,h} - v_{j+1,h/2}| \leq \varepsilon.$$

При неудовлетворительном результате обычно производится следующее деление шага на два и т.д. Однако значительное уменьшение «размера» шага может привести к достаточно быстрому возрастанию вычислительной погрешности. Данный метод оценки точности результата расчета носит название *способа двойного счета*.

Метод Эйлера-Коши (модифицированный метод Эйлера 2-го порядка), как попытка уточнения метода ломаных изменяет направление перехода от точки A_j к точке A_{j+1} с помощью вспомогательной точки

$\bar{A}_{j+1}(t_{j+1}, \bar{v}_{j+1})$ при значении $\bar{v}_{j+1} = v_j + h\Phi(t_j, v_j)$, т.е. расчет ведется через усредненное направление ломаных Эйлера

$$v_{j+1} = v_j + 2^{-1}h[\Phi(t_j, v_j) + \Phi(t_{j+1}, \bar{v}_{j+1})], \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Реализацию формулы (3) также рекомендуется сопровождать применением способа двойного счета.

Кроме того, согласно представленной классификации метод Эйлера и его модификации могут быть реализованы в двух формах расчетных схем – *явной (экстраполяционной)* и *неявной (интерполяционной)* – в зависимости от способа замены производной $\dot{v}(t) \equiv dv/dt$ в уравнении (1) на разностное отношение. Например, если положить $\dot{v}(t_k) \simeq (v_{k+1} - v_k)/h$, то схема считается явной (ФДВ), если $\dot{v}(t_k) \simeq (v_k - v_{k-1})/h$, то неявной (ФДН). В частности, формула (2) реализует явную схему.

Семейство методов Рунге-Кутты (остановимся подробнее на явных схемах) связано с применением при выбранном шаге h следующей обобщенной итерационной формулы (разностного уравнения) в форме линейной комбинации

$$v_{j+1} = v_j + \sum_{i=1}^s w_i k_{ij}(h), \quad (j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, s), \quad (4)$$

где w_i - постоянная величина; $k_{1,j}(h)$, $k_{i+1,j}(h)$ - функциональные коэффициенты, определяемые при введении дополнительных констант α_{i+1} , $\beta_{i+1,i}$ согласно выражениям

$$\begin{aligned} k_{1,j}(h) &= h\Phi(t_j, v_j), \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\ k_{i+1,j}(h) &= h\Phi(t_j + \alpha_{i+1}h, v_j + \beta_{i+1,i}k_{i,j}(h) + \dots \\ &\quad \dots + \beta_{i+1,s-1}k_{s-1,j}(h)), \quad (j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (5)$$

Выбор параметров w_i , α_{i+1} , $\beta_{i+1,i}$ связан со способом вычисления погрешности соответствующего приближения. В частности, при опускании в (5) индекса j погрешность аппроксимации разностного уравнения оценивается как функция вида

$$\psi(h) = v(t+h) - v(t) - \sum_{i=1}^s w_i k_i(h), \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (6)$$

при требовании выполнения набора условий

$$\psi(0) = 0; \quad \psi'_h(h) = 0; \quad \psi''_{hh}(h) = 0; \quad \dots; \quad \psi^{(\gamma)}(h) = 0 \quad (7)$$

общим числом $(\gamma + 1)$, где γ - порядок погрешности метода.

При разложении зависимости $\psi(h)$ из (6) по формуле Тейлора

$$\psi(h) = \frac{\psi^{(\gamma+1)}(\lambda h)}{(\gamma+1)!} h^{\gamma+1} + \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{\psi^{(i)}(h)}{i!} h^i, \quad (0 < \lambda < 1) \quad (8)$$

система (7) может быть использована для вычисления параметров из множества $w_i, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1,j}$. Считается, что погрешность аппроксимации (локальная ошибка усечения [12] или невязка) определяется порядком $O(\Delta t^n) = O(h^n)$ при $\Delta t = h \rightarrow 0$. Интересно, что присваивание различных значений параметру s в указанных формулах приводит к методам, уже рассмотренным нами выше с погрешностью γ . Заметим, что методы Рунге-Кутты при $s \geq 5$ не используются.

Итак, для получения результата математической модели, в том числе относящейся к описанию поведения реального технологического процесса в области химических технологий, требуется проанализировать методы решения системы дифференциальных уравнений различных порядков, например, с позиций оценки полной погрешности приближенного решения задачи. При этом условно можно выделить возможные варианты математической постановки задач для ОДУ, которые сводятся к задаче Коши для ОДУ 1-го порядка, и на основе условной классификации методов ее решения, предварительно оценив степени сходимости данных методов, выбрать наиболее рациональный способ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капранова А.Б. Основные принципы алгоритмизации математического описания технологических процессов / А.Б. Капранова, А.И. Зайцев. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. 104 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
3. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. М.: Наука, 1989. 432 с.
4. Батунер Л.М. Математические методы в химической технике / Л.М. Батунер, М.Е. Позин. М.: Химия, 1971. 824 с.
5. Заварыкин В.М. Численные методы / В.М. Заварыкин, В.Г. Жиромирский, М.П. Лапчик. М.: Просвещение, 1990. 176 с.
6. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. М.: Мир, 2001. 604 с.
7. Буслов В.А. Численные методы. I. Исследование функций: Курс лекций / В.А. Буслов, С.Л. Яковлев. СПб: Изд-во СПбГУ, 2001. 60 с.
8. Капранова А.Б. Основные математические способы проектирования технологических процессов. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. 176 с.
9. Корнейчук Н.П. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун / отв. ред. А.И. Степанец; ред. С.Д. Кошис, О.Д. Мельник; Ин-т математики АН Украины. Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.
10. Шикин Е.В. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей / Е. В. Шикин, Л. И. Плис. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. 240 с.
11. Васильков Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. М.: Финансы и статистика, 1999. 256 с.
12. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1984. 832 с.

УДК 379.85

О. В. Карташева

Ярославский филиал Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
Россия, г. Ярославль, e-mail: o.kartasheva@list.ru

**ИНФОРМАЦИОННЫЙ РЕСУРС
MIT SLOAN MANAGEMENT REVIEW НА ЗАНЯТИЯХ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА
И УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИЕЙ» ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ
«БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА»**

Применение MIT Sloan Management Review на практических занятиях по дисциплине «Информационная система и управление организацией» позволяет реализовать межпредметные связи с дисциплинами «Иностранный язык», «Профессиональный иностранный язык» и «Деловые ресурсы Интернет», а также способствует формированию ряда компетенций.

Ключевые слова: информационная система, информационный ресурс, управление организацией

O. V. Kartasheva

*Yaroslavl branch of Financial University under Government
of the Russian Federation,
Russia, Yaroslavl, e-mail: o.kartasheva@list.ru*

**MIT SLOAN MANAGEMENT REVIEW RESOURCE
ON CLASSES OF COURSE "THE INFORMATION SYSTEM
AND MANAGEMENT OF THE ORGANIZATION"
FOR THE BUSINESS INFORMATICS PROGRAM**

Application of MIT Sloan Management Review at the lessons in the course "The information system and management of the organization" allows to realize intersubject communications with disciplines "Foreign language", "A professional foreign language" and "Business resources of the Internet", and also promotes the formation of a number of competences.

Keywords: information system, information resource, management of the organization.

Дисциплина «Информационная система и управление организацией» представлена в учебном плане Ярославского филиала Финуниверсите-

та в вариативной части профессионального цикла направления 38.03.05 «Бизнес-информатика» под номером В.3.7.

Целью изучения дисциплины является формирование у обучающихся теоретического фундамента для выработки управленческих решений по организации процессов внедрения и адаптации информационных систем и технологий в организации, определении места роли информационных систем контуре организации [2]. Фундамент для изучения основных направлений влияния современных информационных систем на состояние и развитие организации обеспечивается теоретической и практической подготовкой в области менеджмента, методологии проектирования и внедрения информационных систем, информационного права, экономики информационного бизнеса, методологий проектирования архитектуры предприятия.

В результате изучения дисциплины «Информационная система и управление организацией» студент должен:

знать:

- принципы, положенные в основу развития информационных систем и технологий;
- особенности текущего состояния ИТ-отрасли и направления ее влияния на предприятия(организации);
- основы ИТ-аутсорсинга;
- основы разработки ИТ-стратегии и модели стратегического соответствия;
- тип корпоративной культуры и направления влияния на них информационных систем и технологий;
- модели позиционирования ИТ в организации;

уметь:

- оценивать альтернативные пути для позиционирования различных видов ИТ-деятельности;
- аргументированно обосновывать необходимость использования ИТ-аутсорсинга в организации;
- обозначать проблемы персонала, связанные с ИТ-обеспечением;
- оценивать пути контроля ИТ-деятельности и включать их в общую стратегию;
- использовать модели, чтобы проанализировать возможное стратегическое преимущество ИС для организации;
- определять роль информационных систем, используемых организацией;

владеть:

- методикой оценки влияния ИС и ИКТ на деятельность организации;
- методикой выбора способа организации ИТ-отдела;

- навыками построения модели конкурентных ценностей и модели стратегического соответствия для анализируемых предприятий;
- навыками презентации подготовленных аналитических обзоров.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 5 зачетных единицы, аудиторная нагрузка для студентов заочного отделения – 24 часа (4 часа лекций, 20 часов практики). Видом промежуточной аттестации является экзамен. Для закрепления теоретических знаний и полученных навыков, связанных с определением роли и места информационных систем, поддерживающих бизнес-процессы предприятия (организации), степени и направления влияния ИС на предприятия, позиционирование ИТ-отдела и оценки перспектив развития ИС на основе полученных в процессе обучения знаний студенты должны выполнить две контрольные работы.

Содержание дисциплины, структурированное по темам:

1. Основные роли и функции информационных систем.
2. Информационная система как часть организационной структуры.
3. Влияние корпоративной культуры на внедрение и применение информационных систем.
4. Информационная система и иерархия управления в организации.
5. Развитие информационных систем и трансформация организационных структур.
6. Политические аспекты внедрения и применения информационных систем.
7. Организация работы ИТ-отдела.
8. Информационные системы как объект стратегической важности.
9. Информационные системы и человеческий фактор.

Изучение дисциплины подразумевает в том числе и знакомство с большим количеством современных зарубежных концепций, принципов и моделей, таких как:

1. Принцип приспособленного детерминизма: модель Giddens, частично случайный характер влияния на структурные характеристики организации внедрения ИТ.
2. Исследование Brynjolfsson и Hitt. Развитие ИС с точки зрения превалирующей культуры. Конфликт корпоративной культуры заказчика и разработчика информационной системы.
3. Модель конкурентных ценностей (Cooper) и характеристика четырех культурных типов. Классификация информационных систем через культурные типы.
4. Теория Malone: установление баланса между центральным и местным контролем.
5. Модель Galati / Galano: интеграция или отделение.
6. Подход Andal-Ancion: работа без посредников, работа с посредником, сетевое сотрудничество.

7. Информационный глобализм и информационный сепаратизм по Davenport. Федеративная или дистрибьюторская модель организации ИТ-деятельности.

8. Обоснование менеджером выбора в пользу ИТ-аутсорсинга по Lacity.

9. Запланированные и неожиданно возникающие стратегии по Mintzberg, Spil. Взаимосвязь общей и ИТ-стратегии.

10. Модели Porter и Treacy-Wiersema в контексте ИТ-стратегий. Приведение ИС в соответствие с корпоративной стратегией по Lockamy: «стратегическое выравнивание», «бизнес-выравнивание», «структурное выравнивание».

11. Принципы человеко-машинного взаимодействия по Faulkner.

12. Роль независимых переменных воспринимаемой легкости и воспринимаемой полезности в модели принятия технологии Devis.

Основными формами текущего контроля знаний являются решение ситуационных задач, подготовка вопросов, выносимых на самостоятельную работу, активное участие в работе на практических занятиях и лекциях. Одним из видов самостоятельной работы студентов-бакалавров является подготовка доклада. [5]. Нужно отметить, что учебной литературы по этим вопросам явно недостаточно, и при изучении современных зарубежных концепций, принципов и моделей целесообразно использовать первоисточники (научных статей авторов концепций) [3].

Одним из информационных ресурсов, содержащим большое количество статей по проблематике дисциплины «Информационная система и управление организацией» является электронная версия журнала MIT Sloan Management Review. MIT Sloan школа менеджмента или MIT Sloan (англ. MIT Sloan School of Management) — международная бизнес-школа при Массачусетском технологическом институте в Кембридже США штат Массачусетс [6]. MIT Sloan School of Management традиционно сильна в нескольких областях, включая консалтинг, предпринимательство и менеджмент в сфере информационных технологий.

Школой с 1959 года выпускается журнал MIT Sloan Management Review, который является одним из известнейших изданий, посвященных управлению инновациями. MIT Sloan Management Review – авторитетное издание Sloan Business School, посвященное актуальным аспектам управленческой деятельности, новым технологии и подходам в бизнесе. Материалы MIT Sloan Management Review освещают целый спектр проблем, с которыми современные компании сталкиваются, пытаются сохранить и упрочить своё положение на рынке [7]. В журнале есть разделы, посвященные электронной коммерции, управлению ИТ-проектами, внедрению новых информационных технологий в управление организацией.

Электронные версии номеров журнала размещены на сайте <http://sloanreview.mit.edu/>. Материалы представлены в гипертекстовом формате на трех уровнях: заголовок статьи, аннотация статьи, полный текст статьи. Для того чтобы использовать ресурсы сайта, нужно зарегистрироваться. После бесплатной регистрации пользователь получает свободный доступ к материалам первых двух уровней, возможность участвовать в обсуждении статей и в течение месяца ознакомиться с содержанием трех статей и скачать их в формате pdf.

Применение MIT Sloan Management Review на практических занятиях по дисциплине «Информационная система и управление организацией» позволяет реализовать межпредметные связи с дисциплинами «Иностранный язык», «Профессиональный иностранный язык» [4] и «Деловые ресурсы Интернет», а также способствует формированию следующих компетенций [1]:

- способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-5);
- способность работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия (ОК-6);
- способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-1);
- способность работать с компьютером как средством управления информацией, работать с информацией из различных источников, в том числе в глобальных компьютерных сетях (ОПК-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ от 11 августа 2016 г. № 1002. Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика (уровень бакалавриата)
2. *Алтухова Н.Ф.* Информационная система и управление организацией: Рабочая программа дисциплины предназначена для студентов, обучающихся по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика» (программа подготовки бакалавров), профиль «Информационные технологии в бизнесе». М.: Финанс. ун-т, кафедра «Бизнес-информатика», 2016. 18 с.
3. *Васильков Ю.В.* Роль и опыт применения информационных технологий в формировании компетентного подхода в образовании / Ю.В. Васильков, Л.С. Гущина, Н.Н. Заботина // Науч.-метод. электронный журн. / концепт Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании (Киров). 2016. Т. 37. С. 30-37.
4. *Дьяконенко Ю.Н.* Использование открытых образовательных ресурсов в вузе // Науч.-метод. электронный журн. / концепт Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании (Киров). 2016. Т. 37. С. 44-50.

5. Кузьмина О.Б. Подготовка доклада как вид самостоятельной работы студентов-бакалавров по направлению подготовки «Прикладная информатика» в условиях использования информационных технологий // Сб. материалов науч.-практ. конф. преподавателей и сотрудников Академии МУБиНТ. 2015. С. 164-168.
6. Свободная энциклопедия Википедия, статья «MIT Sloan школа менеджмента» [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/MIT_Sloan (дата обращения: 22.10.2016)
7. MIT Sloan Management Review [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://sloanreview.mit.edu/> (дата обращения: 22.10.2016)

УДК 66.011

В. К. Леонтьев, Е. А. Гирба, О. Н. Кorableва

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: leontievvk@ystu.ru, girbaea@ystu.ru,
korablevaon@yandex.ru

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯХ ЭЙЛЕРА)

Предложен способ получения дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости (уравнений Эйлера) из уравнений равновесия.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения движения, единичная массовая сила, принцип Даламбера, уравнение Д. Бернулли.

V. K. Leont'ev, E. A. Girba, O. N. Korableva

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: leontievvk@ystu.ru, girbaea@ystu.ru,
korable-vaon@yandex.ru

ABOUT DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION OF IDEAL FLUID (EULER EQUATIONS)

We propose a method of obtaining differential equations of motion of an ideal fluid (Euler equations) from the equations of equilibrium.

Keywords: differential equations of motion, the unit mass force, the principle of D'Alembert, D. Bernoulli equation.

Основным уравнением гидродинамики является уравнение Д. Бернулли. Это уравнение является частным случаем закона сохранения энергии. На наш взгляд, это уравнение правильнее получать, используя теорему живых сил в дифференциальной форме.

В основных учебниках по дисциплине «Процессы и аппараты химической технологии» уравнение Д. Бернулли получают из дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости (уравнений Эйлера) [1].

В свою очередь уравнения Эйлера получают из уравнений Навье-Стокса, исключая силы трения.

В настоящее время при нехватке времени на вывод уравнений Навье-Стокса, дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера) можно быстро получить из дифференциальных уравнений равновесия, которые имеют вид

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{\text{мас}}(x) = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{\text{мас}}(y) = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_{\text{мас}}(z) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $F_{\text{мас}}(x)$, $F_{\text{мас}}(y)$, $F_{\text{мас}}(z)$ – проекции единичных массовых сил на оси координат, м/с².

По принципу Даламбера уравнение движения может быть получено из уравнения равновесия путем добавления к действующим силам сил инерции переносного движения [2].

В общем виде сила инерции

$$F_{\text{ин}} = -m \frac{du}{d\tau}, \quad (2)$$

где $\frac{du}{d\tau}$ – ускорение, м/с². Проекции единичной силы инерции на оси координат будут соответственно:

$$\text{на ось } x: F_{\text{ин}}(x) = -\frac{du_x}{d\tau},$$

$$\text{на ось } y: F_{\text{ин}}(y) = -\frac{du_y}{d\tau},$$

$$\text{на ось } z: F_{\text{ин}}(z) = -\frac{du_z}{d\tau}.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{mac}(x) - \frac{du_x}{d\tau} = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{mac}(y) - \frac{du_y}{d\tau} = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_{mac}(z) - \frac{du_z}{d\tau} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Эта форма записи используется в курсе «Процессы и аппараты химической технологии» для получения уравнения Д. Бернулли [1].

Для решения других задач (определения поля скоростей, поля давлений) дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости необходимо преобразовать, т.е. перейти к частным производным.

В общем случае скорость u является функцией времени и координат: $u = f(\tau, x, y, z)$. Тогда полный дифференциал функции u_x (проекция скорости на ось x):

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz. \quad (4)$$

Разделим все члены уравнения (6) на $d\tau$:

$$\frac{du_x}{d\tau} = \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}. \quad (5)$$

С учетом того, что

$$\frac{dx}{d\tau} = u_x, \quad \frac{dy}{d\tau} = u_y, \quad \frac{dz}{d\tau} = u_z$$

есть проекции скорости на оси координат, получим

$$\frac{du_x}{d\tau} = \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z. \quad (6)$$

Аналогично для других осей

$$\frac{du_y}{d\tau} = \frac{\partial u_y}{\partial \tau} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z, \quad (7)$$

$$\frac{du_z}{d\tau} = \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z, \quad (8)$$

Эти выражения подставляем в уравнения (3)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{mac}(x), \\ \frac{\partial u_y}{\partial \tau} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{mac}(y), \\ \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_{mac}(z). \end{cases} \quad (9)$$

В системе уравнений (9) четыре неизвестных: p, u_x, u_y, u_z . Чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо добавить уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Полученная система позволяет определить поля скоростей и давлений для некоторых случаев движения идеальных жидкостей. В частности, с помощью этих уравнений можно найти связь между давлением, скоростью и плотностью в любом живом сечении потока идеальной жидкости при установившемся движении, если из массовых сил действует только сила тяжести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии. В 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с.
2. *Яблонский А. А.* Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика: учебник для студентов вузов, обуч. по техн. специальностям / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. 16-е изд., стер. М.: КНОРУС, 2011. 603 с.

УДК 517.9

Л. Б. Медведева, Н. И. Иванова

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: natalii-i@list.ru

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются основные методы решения функциональных уравнений, изучаемых студентами при подготовке к математическим олимпиадам различных уровней.

Ключевые слова: функциональное уравнение, метод подстановки, предельный переход, производная.

L. B. Medvedeva, N. I. Ivanova

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: natalii-i@list.ru

METHODS OF DECISION OF FUNCTIONAL EQUATIONS

We present the principal methods for solving functional equations which are studied by students in preparation for mathematical competitions (olympiads) of various levels.

Keywords: *functional equation, method of substitution, passage to the limit, derivative.*

Подготовка студентов к математическим олимпиадам различных уровней предполагает решение задач из различных разделов математики. Данная работа посвящена различным методам решений функциональных уравнений.

Функциональными называются уравнения, в которых неизвестными являются функции, связанные с известными функциями при помощи алгебраических операций и операции образования сложной функции.

Решение функциональных уравнений – одна из самых старых проблем математического анализа, которой занимались крупнейшие математики, в том числе Ж. Л. Даламбер (1717–1783), К. Ф. Гаусс (1777–1855), О. Л. Коши (1789–1857), Н. Х. Абель (1802–1829), Ж. Г. Дарбу (1842–1917).

Важным моментом в истории функциональных уравнений было появление четырех уравнений, названных именем Коши: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Эти уравнения, являясь простейшими примерами функциональных уравнений, имеют большое значение для математики, поскольку могут быть положены в основу определения элементарных функций, соответственно, $f(x) = ax$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$ и $f(x) = x^a$ [1].

В теории функциональных уравнений известно мало общих методов решения и теорем существования. Задача решения функционального уравнения, как правило, не устойчива даже к малому изменению условия. Поэтому решение каждого уравнения требует индивидуального подхода. Поиск решения функционального уравнения зависит также от класса функций, в котором требуется найти решение. В классе непрерывных функций может получиться одно решение, в классе дифференцируемых – другое; при этом меняется и характер рассуждений, которые приводят к нужному ответу.

В данной работе рассматриваются различные разновидности метода подстановки и некоторые стандартные замены, применяемые при решении функциональных уравнений, а также метод предельного перехода и метод производной, применяемые при решении функциональных уравнений в классе дифференцируемых функций.

1. Метод подстановки

Суть метода заключается в том, что в уравнении независимая переменная заменяется некоторой функцией новой независимой переменной. В результате получается новое уравнение относительно неизвестной функ-

ции. В отдельных случаях новое уравнение легко решается. Довольно часто приходится делать несколько подстановок и комбинировать уравнения, полученные в результате различных подстановок, с исходным уравнением.

По виду подстановки и способу её использования можно выделить следующие разновидности метода:

- 1) метод последовательного расширения значений аргумента;
- 2) сведение функциональных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений, относительно каких-то функций, среди которых содержится искомая;
- 3) сведение функциональных уравнений к другому (более простому), решение которого уже известно, например, уравнению Коши.

1.1. Метод последовательного расширения значений аргумента

Этот метод применяется в том случае, когда решение ищется в классе непрерывных функций. Идея метода состоит в последовательном нахождении решений уравнения сначала на множествах \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{Q} . Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ существует последовательность рациональных чисел $x_n \in \mathbb{Q}$, сходящаяся к x . Так как в классе непрерывных функций возможен предельный переход под знаком непрерывной функции, то справедливо равенство $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Таким образом находится решение функционального уравнения на множестве \mathbb{R} .

Рассмотрим применение данного метода на следующем примере.

Задача 1 [2, с.11]. Найти все непрерывные на \mathbb{R} функции $f(x)$ удовлетворяющие для любых $x, y \in \mathbb{R}$ функциональному уравнению $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ и неравенству $f(x) > -1$.

Решение. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет указанным условиям. При $y = x$ получим $f(2x) = 2f(x) + f^2(x)$ или $f(2x) = (1 + f(x))^2 - 1$. Последнее равенство легко обобщить: методом математической индукции доказывается, что при любом $n \in \mathbb{N}$ $f(nx) = (1 + f(x))^n - 1$.

Возьмем в этом равенстве $x = 1$. Обозначив $k = 1 + f(1)$ получим $f(n) = k^n - 1$ при $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, при $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = \left(1 + f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n - 1 \text{ и } \left(1 + f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n = 1 + f(m) = k^m.$$

Отсюда, учитывая, что $k > 0$, получаем $f\left(\frac{m}{n}\right) = k^{m/n} - 1$.

Для любого числа $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ найдется такая последовательность положительных чисел $x_n \in \mathbb{Q}$ что $x_n \rightarrow x$. Как доказано выше, $f(x_n) = k^{x_n} - 1$. Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $f(x) = k^x - 1$.

Полагая в функциональном уравнении $y = -x$, получим $f(0) = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x)$. Так как $f(0) = k^0 - 1 = 0$, а $f(-x) > -1$, то при $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$

$$f(x) = -\frac{f(-x)}{1 + f(-x)} = -\frac{k^{-x} - 1}{1 + k^{-x} - 1} = k^x - 1.$$

Итак, если $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям задачи, то $f(x) = k^x - 1$.

Проверим, что эта функция действительно удовлетворяет условиям задачи. Действительно, $f(x) = k^x - 1 > -1$ и для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + f(x)f(y) &= k^x - 1 + k^y - 1 + (k^x - 1)(k^y - 1) = \\ &= k^{x+y} - 1 = f(x+y). \end{aligned}$$

Упражнения

1. Найти функцию $f(x)$ определенную и непрерывную на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющую условиям $f(1) = 1$, для любых $x, y \in \mathbb{R}$ $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y)$. *Ответ:* $f(x) = x^2$.

2. Найти все непрерывные функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношению $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

Ответ: $f(x) = cx + x^3/3$.

1.2. Сведение функциональных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим уравнение вида

$$a(x)f(\varphi(x)) + b(x)f(x) = F(x) \quad [3, \text{с.21}],$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ – заданные функции, причем $\varphi(\varphi(x)) = x$; а $f(x)$ – искомая функция.

Заменив в уравнении x на $\varphi(x)$, получим вместе с исходным уравнением систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $f(x)$ и $f(\varphi(x))$:

$$\begin{cases} a(x)f(\varphi(x)) + b(x)f(x) = F(x), \\ b(\varphi(x))f(\varphi(x)) + a(\varphi(x))f(x) = F(\varphi(x)). \end{cases}$$

Остается только решить эту систему и найти $f(x)$.

Рассмотренный метод применим к уравнению и в случае, когда k -кратная композиция функции $\varphi(x)$ равна x , то есть $\varphi(\varphi(\dots\varphi(x)\dots)) = x$.

В этом случае задача отыскания решения функционального уравнения сводится к решению системы k линейных алгебраических уравнений.

Задача 2 [3, № 1.4, с. 112]. Решить функциональное уравнение $(x+1)f(x) + f(1/x) = 1$.

Решение. Если $\varphi(x) = 1/x$, то $\varphi(\varphi(x)) = 1/(1/x) = x$. Заменяя в уравнении x на $\varphi(x) = 1/x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)f(x) + f(1/x) = 1, \\ (1/x+1)f(1/x) + f(x) = 1, \end{cases}$$

из которой, исключая $f(1/x)$, находим $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Задача 3 [9, с. 25]. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f(x) = x$.

Решение. Если $\varphi(x) = \frac{x-1}{x}$, то $\varphi(\varphi(x)) = -\frac{1}{x-1}$, $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x$.

Заменяя в уравнении x на $\varphi(x) = \frac{x-1}{x}$ и на $\varphi(\varphi(x)) = -\frac{1}{x-1}$, получим систему трех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f(x) = x, \\ f\left(-\frac{1}{x-1}\right) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}, \\ f(x) + 2f\left(-\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{x-1}. \end{cases}$$

Решив данную систему, например, по формулам Крамера, найдем функцию $f(x) = \frac{1}{9}\left(-2 + 4x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right)$, являющуюся решением исходного функционального уравнения.

1.3. Подстановки, приводящие уравнения к более простым

Как уже было сказано, функциональные уравнения требуют некоторого творчества. Иногда необязательно следовать описанным выше подстановкам, а достаточно выявить некоторые специфические свойства уравнения и подобрать такие значения аргумента, которые позволили бы весьма быстро получить решение или же показать, что решений (нетривиальных) нет.

Задача 4 [2, с. 28]. Найти все функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$.

Решение. Сделаем в уравнении следующие подстановки: 1) $x = 0$, $y = t$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + t$, $y = \frac{\pi}{2}$; 3) $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + t$ и обозначим $f(0) = a$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f(t) + f(-t) = 2\cos t, \\ f(\pi + t) + f(t) = 0, \\ f(\pi + t) + f(-t) = -2b \sin t. \end{cases}$$

Вычитая из суммы первых двух уравнений третье, находим $2f(t) = 2a \cos t + 2b \sin t$, $f(t) = a \cos t + b \sin t$.

Нетрудно убедиться, что найденная функция $f(x) = a \cos x + b \sin x$ действительно является искомым решением заданного уравнения.

Задача 5 [5]. Найти все функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ $f(\sin x + \cos x) + 2f(\sin x - \cos x) = \cos^2 2x$.

Решение. Заменяя x на $\pi - x$, получим еще одно уравнение

$$f(\sin x - \cos x) + 2f(\sin x + \cos x) = \cos^2 2x.$$

Умножим второе из них на 2 и вычтем первое. Получим, что

$$f(\sin x + \cos x) = \frac{1}{3} \cos^2 2x.$$

Обозначим $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$. Тогда $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x, \quad \sin 2x = t^2 - 1,$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - (1 - t^2)^2 = 2t^2 - t^4,$$

а $f(t) = \frac{2t^2 - t^4}{3}$ при $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Вне отрезка $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ значения $f(t)$

зададим произвольно. Непосредственно проверяется, что для такой функции заданное соотношение выполняется.

2. Метод предельного перехода

Метод предельного перехода или последовательных подстановок рассматривается в работе [4]. Он применяется при решении уравнений в классе непрерывных функций, где, как известно, возможен предельный переход под знаком функции. Рассмотрим идею метода на примерах.

Задача 6 [10, № 269, с. 41]. Найти решение уравнения

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2$$

на множестве непрерывных функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть $x = 0$, тогда $f(0) - \frac{1}{2} f(0) = 0$ и $f(0) = 0$. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = \frac{x}{2}$ и построим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \varphi(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}}{2}$: $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $x_3 = \frac{x_1}{2^2}$, ..., $x_n = \frac{x_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Подставив $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ в исходное уравнение, получим систему

$$\begin{cases} f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2) = x_1 - x_1^2, \\ f(x_2) - \frac{1}{2} f(x_3) = x_2 - x_3^2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f(x_{n-1}) - \frac{1}{2} f(x_n) = x_{n-1} - x_{n-1}^2. \end{cases}$$

Умножив k -тое уравнение на $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ и сложив их, получим

$$\begin{aligned} f(x_1) - \frac{1}{2^{n-1}} f(x_n) &= (x_1 - x_1^2) + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^2) + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}(x_{n-1} - x_{n-1}^2) = \\ &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}x_{n-1} - (x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}x_{n-1}^2) = \\ &= x_1 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2(n-2)}}\right) - x_1^2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{3(n-2)}}\right). \end{aligned}$$

В скобках стоят суммы $n-1$ членов геометрических прогрессий со знаменателями $1/4$ и $1/8$ соответственно и первыми членами, равными 1 . Поэтому

$$f(x_1) - \frac{1}{2^{n-1}} f(x_n) = x_1 \frac{1 - \frac{1}{2^{2(n-1)}}}{1 - \frac{1}{4}} - x_1^2 \frac{1 - \frac{1}{2^{3(n-1)}}}{1 - \frac{1}{8}}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, будем иметь $f(x_1) = \frac{4}{3}x_1 - \frac{9}{7}x_1^2$ или $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{9}{7}x^2$, что и подтверждает проверка.

Задача 7 [6]. Найти все непрерывные функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $2f(2x) = f(x) + x$ для любых $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию задачи.

Тогда, заменяя последовательно x на $\frac{x}{2}$, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{8}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} = \\ &= \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \dots + \frac{x}{4^n}. \end{aligned}$$

Воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ и перейдем к пределу в обеих частях этого равенства при $n \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \dots + \frac{x}{4^n}\right) = 0 + \frac{x/4}{1 - 1/4} = \frac{x}{3}.$$

Проверка показывает, что функция $f(x) = x/3$ действительно удовлетворяет условиям задачи.

3. Метод производной

Метод производной применяется при решении функциональных уравнений в классе дифференцируемых функций. Идея метода состоит в сведении функционального уравнения к дифференциальному уравнению. Это достигается двумя способами.

Первый способ использует определение производной:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Его применяют, как правило, в случаях, когда искомая функция, входящая в уравнение, зависит от суммы или от разности независимых переменных, так как тогда одну из независимых переменных можно рассматривать как малое приращение другой.

Второй способ сводится к дифференцированию функционального уравнения последовательно по каждой из переменных. Этот прием дает результат, когда неизвестная функция, входящая в уравнение, зависит или от суммы, или от разности, или от частного, или от произведения независимых переменных, то есть содержит или $f(x+y)$, или $f(x-y)$, или $f(xy)$, или $f(x/y)$.

Последовательное дифференцирование по каждой из двух независимых переменных приводит к двум равенствам, из которых исключается производная искомой функции, содержащая две независимые переменные, а оставшееся равенство приводит к дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $f(x)$.

Общее же решение дифференциального уравнения в описанных случаях будет решением и функционального уравнения при всех или некоторых значениях произвольных постоянных, для отыскания которых иногда удастся получить начальные условия из самого функционального уравнения.

Продемонстрируем оба метода на конкретных примерах.

3.1. Решение функциональных уравнений с помощью определения производной

Задача 8. Найти все дифференцируемые функции $f(x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(x+y)[1-f(x)f(y)] = f(x) + f(y), \quad x, y, x+y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет данному уравнению. При $x = y = 0$ получим $f(0)[1-f^2(0)] = 2f(0)$, откуда следует, что $f(0) = 0$.

Из уравнения последовательно получаем:

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) &= f(y)f(x)f(x+y), \\ \frac{f(x+y) - f(x)}{y} &= \frac{f(y)}{y}(1 + f(x)f(x+y)), \\ \frac{f(x+y) - f(x)}{y} &= \frac{f(y) - f(0)}{y}(1 + f(x)f(x+y)). \end{aligned} \quad (*)$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема, то она и непрерывна. Поэтому

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f'(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f'(0), \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x+y) = f(x),$$

Переходя в равенстве (*) к пределу при $y \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $f'(x) = a(1 + f^2(x))$, где

обозначено $a = f'(0)$. Разделяя переменные, получаем $\int_0^x \frac{f'(x)dx}{1 + f^2(x)} = a \int_0^x dx$,

$\arctg f(x) - \arctg f(0) = ax$, $\arctg f(x) = ax$. Вследствие последнего равен-

ства $ax \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $a = 1$ или $a = -1$, $\operatorname{arctg} f(x) = \pm x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ или $f(x) = -\operatorname{tg} x$. Проверкой убеждаемся, что обе функции удовлетворяют функциональному уравнению.

Упражнения

1. Решить функциональное уравнение $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, в классе дифференцируемых функций.

Ответ: $f(x) = x^2 + cx$.

2. Найти все дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению $(1 + f(x)f(y))f(x+y) = f(x) + f(y)$ [2, с. 15].

Ответ: $f(x) = \operatorname{th} ax$ и $f(x) = 1$.

3.2. Решение функциональных уравнений последовательным дифференцированием по независимым переменным

Задача 9. Решить уравнение Коши $f(x+y) = f(x) + f(y)$ в классе дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Продифференцируем уравнение последовательно по x и по y . Получим $f'(x+y) = f'(x)$ и $f'(x+y) = f'(y)$. Отсюда для любых $x, y \in \mathbb{R}$ $f'(y) = f'(x)$. То есть $f'(x) = a$ – постоянная. Тогда $f(x) = ax + c$, где c – постоянная. Подставляя в уравнение, получаем равенство $a(x+y) + c = ax + c + ay + c$, верное только при $c = 0$. Итак, искомые решения $f(x) = ax$, где a – любое действительное число.

Упражнения

1. Решить уравнение Коши $f(xy) = f(x)f(y)$ в классе дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in (0, \infty)$. *Ответ:* $f(x) = x^a$.

2. В классе дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in (0, \infty)$, решить функциональное уравнение $f(x \cdot y) = [f(x)]^y \cdot [f(y)]^x$. *Ответ:* $f(x) = x^{ax}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970.
2. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // УМН. 1956. Май – июнь. С. 3–41.
3. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб.: Лань, 1997.

4. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколзин. М.: Наука, 1978.
5. Ройтенберг В.Ш. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю. К. Оленикова, Л.А. Сидорова. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. 127 с.
6. Иванова Н.И. О некоторых методах решения функциональных уравнений // Сб. материалов Всерос. очно-заочной конф. «Актуальные проблемы преподавания математики в образовательной организации высшего образования». Кострома: ВА РХБЗ, 2016. С. 106-110.

УДК 51:378

М. Г. Сальникова

Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) им. М.И. Платова
Россия, г. Новочеркасск, e-mail: salnikovamag@gmail.com

**НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

Рассматривается одна из интерактивных форм организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов при обучении математике - работа в малых группах, ее роль в повышении мотивации студентов к обучению.

Ключевые слова: самостоятельная работа студентов, работа в малых группах, мотивация.

M. G. Salnikova

*M.I. Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
Russia, Novocherkassk, e-mail: salnikovamag@gmail.com*

**SOME ASPECTS OF STUDENTS' INDIVIDUAL WORK
ORGANIZATION WHILE TEACHING MATHEMATICS**

The article is dedicated to one of the interactive form of students' individual work organization while teaching mathematics – work in small groups and its role in the increasing of students' motivation to learn.

Keywords: students' individual work, work in small groups, motivation.

В условиях современного образовательного процесса в вузе возрастает роль самостоятельной работы студентов, которая является обязательной формой учебной деятельности и определяется рабочими учебными планами подготовки бакалавров. Согласно требованиям ФГОС ВО выпускник технического вуза должен обладать системой общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций, одна из которых - «способность к самоорганизации и самообразованию». Внеаудиторную самостоятельную работу студентов по математике можно рассматривать как начальный этап в ее формировании. Поэтому в настоящее время остаются актуальными слова Б.Г. Гнеденко о том, что преподаватель вуза должен не только передавать знания, предусмотренные учебным планом, но и развивать у студентов интерес к познанию, совершенствовать навыки самостоятельного изучения ими нового материала [1].

Изучение математики в техническом университете связано с рядом проблем, одной из которых является недостаточная мотивация студентов к обучению в вузе. Это подтверждают результаты проведенного нами опроса первокурсников по профилям подготовки «Машины и аппараты пищевых производств» и «Технология машиностроения». В результате анкетирования выяснилось следующее: 42,2% опрошенных студентов на вопрос «Какое из присущих вам качеств больше всего мешает учиться?» ответили: «Лень»; 37,8% отмечают, что у них недостаточно силы воли, чтобы учиться без напоминания администрации; 42,2% респондентов считают, что лучше всего они занимаются, когда их периодически подстёгивают, стимулируют; 44,4% опрошенных ответили, что им трудно заставить себя изучать дисциплины, которые прямо не относятся к их будущей профессии; 68,9% студентов признаются, что при удобном случае используют на экзаменах подсобные материалы – шпаргалки, конспекты; 33,3% считают, что экзамены нужно сдавать, тратя минимум усилий; 28,9% анкетированных студентов считают, что для полного овладения профессией все учебные дисциплины необходимо изучать одинаково глубоко; 22,2% опрошенных отмечают, что испытывают удовольствие от рассмотрения на занятиях трудных проблем [2, 3].

Работа в малых группах – интерактивная форма организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов, которая развивает личностные качества, навыки межличностного общения и сотрудничества, повышает активность участников учебного процесса, объединенных единой целью. Учебное задание составляется так, что все члены группы взаимосвязаны, но при этом самостоятельны в изучении материала и решении задач. В неоднородной группе участник с более высоким уровнем подготовки и мотивации заинтересован в успешности группы. Студент с низким уровнем знаний и мотивации находится в условиях, когда возникает мотив «не

подвести группу», что становится для него стимулом к выполнению задания. Совместная учебная деятельность оказывается действенной для более эффективного усвоения знаний, поскольку «обучение других – наилучший способ усвоения материала». При работе в малых группах студенты произвольно проходят стадию закрепления материала, что особенно подходит для способных студентов, которых не привлекает традиционный способ отработки с помощью многократных упражнений [4].

Так, например, для самостоятельного изучения темы «Приложения дифференциальных уравнений» организуется внеаудиторная самостоятельная работа студентов в группах из 2-3 человек с целью формирования навыков построения простейших математических моделей физических процессов; умений применять соответствующие методы решения и интерпретировать полученные результаты (табл. 1).

Таблица 1. Приложения дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = -kx$, где $k > 0$ коэффициент пропорциональности	
<p><i>Задача 1.</i> Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Диск, начав вращаться с угловой скоростью 5 об/с, через 2 мин вращается со скоростью 3 об/с. Через какое время он будет иметь угловую скорость 1 об/с?</p>	<p><i>Задача 2.</i> Скорость распада радия пропорциональна его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?</p>

При этом устанавливаются междисциплинарные связи с такими параллельно изучаемыми естественнонаучными дисциплинами, как физика, химия, теоретическая механика [5]. Контроль самостоятельной работы студентов осуществляется в форме групповой защиты отчета о выполнении задания.

Таким образом, правильно организованная внеаудиторная самостоятельная работа студентов раскрывает их способности, повышает уровень познавательной активности и, как следствие, общий уровень успеваемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Математическое образование в вузах. М.: Высш. школа, 1981. 174 с.
2. Ильин Е.П. Мотивация и мотивы. СПб.: Питер, 2003. 512 с.

3. Сальникова М.Г. Интерактивные методы в обучении математике студентов технического университета // Тр. 13-й Междунар. науч.-практ. Интернет-конф. «Преподаватель высшей школы в XXI веке»: сб. 13. Ростов н/Д: Ростов. гос. ун-т путей сообщения, 2016. С. 125-129.
4. Смирнов С.Д. Психология и педагогика для преподавателей высшей школы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 422 с.
5. Сборник задач по высшей математике для вузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1981. 368 с.

УДК 510.6:517

М. В. Ушенин, И. Г. Жарова

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ushenin_mv@mail.ru, igzharova@mail.ru

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМВОЛИКИ И ЗАКОНОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Рассматривается применение символики и законов математической логики в доказательствах теорем математического анализа.

Ключевые слова: дискретная математика, математическая логика, математический анализ, предел, теорема, импликация, эквивалентность.

M. V. Ushenin, I. G. Zharova

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ushenin_mv@mail.ru, igzharova@mail.ru

**THE USE OF SYMBOLS AND LAWS
OF MATHEMATICAL LOGIC
IN THE MATHEMATICAL ANALYSIS COURSE**

We discuss the use of symbols and laws of mathematical logic in proofs of theorems of mathematical analysis.

Keywords: discrete mathematics, mathematical logic, mathematical analysis, limit, theorem, implication, equivalence

Проникновение информационных технологий во все без исключения технические системы приобретает всё больший масштаб и требует от

современного инженера компетентности в «новых» разделах математики, не являющихся традиционными при подготовке технических специалистов многих отраслей. Особенный интерес проявляется ко всем разделам дискретной математики: комбинаторике, теории множеств, теории графов, теории алгоритмов и др. Специфика данных разделов математики, базирующихся на законах математической логики, вкупе с «отказом» от рассмотрения привычных функций, приводит как к некоторым затруднениям в восприятии собственно дискретной математики, так и к определенному разрыву между «классической» и «дискретной» математикой.

Одним из методов устранения данного разрыва может быть использование символики и аппарата дискретной математики при изучении классических разделов высшей математики, например, математического анализа.

Математический анализ изобилует теоремами, на доказательство которых уходит львиная доля лекционного времени. В связи с тенденцией постоянного сокращения количества лекционных часов проблема выбора предмета и способа доказательства (точнее способа наглядной подачи материала) особенно актуальна.

В курсе математического анализа, как правило, рассматриваются два вида теорем: *теоремы импликации* и *теоремы эквивалентности*. Рассмотрим оба эти типа подробнее.

1. Теоремы импликации – теоремы вида $A \rightarrow B$.

Для доказательства истинности импликации $A \rightarrow B$ достаточно показать, что из истинности A следует истинность B . В основном используются следующие способы доказательств.

1) *Прямое доказательство* – основано на свойстве транзитивности импликации

$$(A \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Оно представляет собой цепь логически непротиворечивых заключений

$$(A \rightarrow R_1) \wedge (R_1 \rightarrow R_2) \wedge \dots \wedge (R_{n-1} \rightarrow R_n) \wedge (R_n \rightarrow B),$$

из которых следует доказываемый тезис.

Таким образом, для доказательства теоремы $A \rightarrow B$ достаточно установить истинность последовательности промежуточных импликаций:

$$A \rightarrow R_1, R_1 \rightarrow R_2, \dots, R_n \rightarrow B.$$

Пример 1. Теорема о среднем значении: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует такая точка c , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Доказательство теоремы. Введем следующие обозначения.

Условие A – функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Заключение B – $\exists c \in [a, b] \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

R_1, R_2, R_3 – промежуточные заключения (рассуждения).

Заключение R_1 :

$\exists x_1, x_2 \in [a, b]: f(x_1) = m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), f(x_2) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Истинность импликации $A \rightarrow R_1$ определяется второй теоремой Вейерштрасса.

Заключение R_2 :

$$\exists \mu \in [m, M]: \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Истинность импликации $R_1 \rightarrow R_2$ определяется свойством оценки определенного интеграла.

Заключение R_3 :

$$\exists c \in [a, b]: f(c) = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Истинность импликации $R_2 \rightarrow R_3$ определяется второй теоремой Больцано-Коши.

Истинность импликации $R_3 \rightarrow B$ очевидна.

Теорема доказана и её доказательство на языке математической логики имеет вид

$$(A \rightarrow R_1) \wedge (R_1 \rightarrow R_2) \wedge (R_2 \rightarrow R_3) \wedge (R_3 \rightarrow B)$$

или $A \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow B$.

2) *Контрапозиция:*

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \overline{B} \rightarrow \overline{A}.$$

Способ доказательства заключается в том, что вместо исходной теоремы $A \rightarrow B$ доказывается более легкая $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$.

Пример 2. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности: если числовая последовательность имеет предел, то он единственный.

Предварительно заметим, что одно из наиболее простых и компактных доказательств данной теоремы [1] представляет собой текстовый

фрагмент, практически лишенный формул. "Просто слова" студенты на лекции, как известно, не записывают, а если что и запишут, то впоследствии понять записанное трудно, поскольку "глазу зацепиться не за что".

Попытки как-то формализовать доказательство приводят к тому, что вместо одной теоремы приходится доказывать, как минимум, две [2].

Доказательство теоремы. Если ввести следующие обозначения:

A – последовательность $\{x_n\}$ сходится,

B – существует единственное число $a: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

то формулировка теоремы запишется как операция импликации

$$A \rightarrow B,$$

а ее доказательство сведется к доказательству контрапозиции

$$\bar{B} \rightarrow \bar{A},$$

где \bar{B} - последовательность $\{x_n\}$ имеет не единственный предел;

\bar{A} - конечный предел последовательности $\{x_n\}$ не существует.

Подробное доказательство импликации $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ не приводим, так как структурно оно ничем не отличается от доказательства в примере 1.

Иногда такое доказательство не совсем точно называют доказательством "от противного".

3) *Доказательство "от противного"* основано на использовании одного из следующих равносильных преобразований:

$$а) A \rightarrow B \leftrightarrow A \wedge \bar{B} \rightarrow \bar{A}, \quad (1)$$

$$б) A \rightarrow B \leftrightarrow A \wedge \bar{B} \rightarrow B,$$

$$в) A \rightarrow B \leftrightarrow A \wedge \bar{B} \rightarrow R \wedge \bar{R},$$

где R - вспомогательный предикат.

Смысл доказательства "от противного" заключается в том, чтобы, предположив истинность A и ложность B , доказать любое из трех заключений:

а) A ложно, т.е. получить противоречие с предположением истинности A ;

б) B истинно, т.е. получить противоречие с предположением ложности B ;

в) одновременную истинность и ложность некоторого вспомогательного предиката R .

Пример 3. Доказать, что, если x и y - целые числа, делящиеся нацело на 19, то их сумма также делится на 19 нацело.

Доказательство. Введем следующие обозначения.
Условие A – x и y делятся на 19 нацело, т.е.

$$A = (x:19) \wedge (y:19).$$

Заключение B – сумма x и y делится на 19 нацело, т.е.

$$B = (x + y):19.$$

Формулировка задачи при этом запишется как импликация

$$A \rightarrow B.$$

Докажем данное утверждение "от противного" с помощью формулы (1).
Предположим, что A истинно, а B – ложно, т.е. истины

$$A = (x = 19a) \wedge (y = 19b) \text{ и } \bar{B} = (x + y = 19q + r),$$

где $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r \leq 18$.

Из \bar{B} и A получаем $x = 19q - 19b + r = 19(q - b) + r$. Отсюда следует, что x не делится на 19, т.е. A ложно:

$$A \wedge \bar{B} \rightarrow \bar{A} \leftrightarrow A \rightarrow B.$$

Утверждение доказано.

2. Теоремы эквивалентности – теоремы вида $A \leftrightarrow B$.

1) Для доказательства эквивалентности $A \leftrightarrow B$ чаще всего доказываеся *двойная импликация*:

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B),$$

т.е. доказываеся необходимость A для B и достаточность A для B .

Пример 4. Теорема: для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.

Если положить:

A – функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 ;

B – существует производная $f'(x_0)$,

то формулировка данной теоремы запишется как эквивалентность $A \leftrightarrow B$, а её доказательство сведётся к доказательству двойной импликации

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

2) Доказательство *с помощью цепочки истинных эквивалентностей* (производится аналогично прямому доказательству импликации).

Пример 5. Теорема: $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \rightarrow a$.

Доказательство теоремы. Утверждение теоремы состоит в том, что $(f(x) \sim g(x) \text{ при } x \rightarrow a) \Leftrightarrow (f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow a)$.

Доказательство записываем в виде цепочки эквивалентностей:

$$\begin{aligned} (f(x) \sim g(x) \text{ при } x \rightarrow a) &\Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \right) \Leftrightarrow (f(x) - g(x) = o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow a) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow a). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из приведенных примеров следует, что использование законов и символики математической логики позволяет не только установить связь между основными теоремами математического анализа и других разделов математики с операциями математической логики, но и упростить изучение доказательств обучающимися, как за счёт структуризации доказательств, так и за счёт облегчения визуального восприятия материала.

С другой стороны, на примерах известных теорем математического анализа легко иллюстрируются основные операции математической логики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1988. 816 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. 571 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 66.048.3.01:007

А. И. Балунув, П. В. Куделин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: balunovai@ystu.ru, stig.kudelin@yandex.ru

ЭНТРОПИЙНЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В СИСТЕМАХ РАЗДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СМЕСЕЙ

Рассматривается метод описания фазовых переходов в сложных системах разделения непрерывных и дискретно-непрерывных смесей типа нефтяных фракций. В основе метода лежит информационный принцип максимальной энтропии непрерывного множества. Приведены примеры расчета разделительных систем при различных постановках задачи.

Ключевые слова: фазовый переход, термодинамическое равновесие, принцип максимальной энтропии, сложная система, непрерывная смесь, энтропия непрерывного множества.

A. I. Balunov, P. V. Kudelin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: balunovai@ystu.ru, stig.kudelin@yandex.ru

ENTROPY METHOD OF PHASE TRANSITIONS MODELING IN CONTINUOUS MIXES DIVISION SYSTEMS

The method of phase transitions description in the complex dividing systems of continuous and discrete and continuous mixes like oil fractions is considered. The method is based on information principle of continuous set of entropy maximum. Examples of division systems calculation at various problem definitions are given.

Keywords: phase change, thermodynamic equilibrium, maximum entropic principle, complex system, continuous mix, continuous set entropy.

В работе [1] на основе информационного принципа максимальной энтропии (формализм Джейнса [2]) предложен метод описания процесса фазовых переходов многокомпонентных смесей в системах аппаратов од-

нократного испарения (однократной конденсации). Метод позволяет получить наиболее вероятные распределения компонентов в выходных потоках системы произвольной структуры на основе достоверной, но неполной исходной информации, т.е. в условиях неопределенности. В качестве критерия максимального правдоподобия используется информационная энтропия Шеннона.

В настоящей статье принцип максимальной энтропии распространен на новый класс задач – описания фазовых переходов в сложных системах разделения непрерывных (нефтяных) смесей. При этом в качестве критерия максимального правдоподобия выступает информационная энтропия непрерывного множества.

Первоначально рассмотрим особенности представления состава непрерывных смесей и вероятностную (информационную) интерпретацию рассматриваемой задачи, для уяснения сущности принципа максимальной энтропии, а затем перейдем к моделированию фазовых переходов в сложных системах разделения.

Непрерывные смеси. Для непрерывных смесей понятие концентрации компонента теряет смысл и в качестве характеристики фракционного состава используется кривая истинных температур кипения (ИТК) – зависимость доли отгона смеси e от температуры кипения точечных компонентов θ .

Кривая ИТК является интегральной функцией распределения. В расчетах же используется непосредственно не кривая ИТК, а дифференциальная функция распределения состава, или плотность распределения состава $Z(\theta) = de(\theta)/d\theta$. Таким образом, выражение $Z(\theta)d\theta$ характеризует содержание в смеси микрофракции с температурами выкипания от θ до $\theta + d\theta$. Аналогом этого выражения при описании многокомпонентных (дискретных) смесей является концентрация.

Вероятностная интерпретация задачи. Пусть имеется ящик (система), разделенный перегородками с отверстиями на p камер (продуктов), в каждой из которых находится достаточно большое число шаров (молекул) m различных типов. Типы шаров различаются по весу, размеры шаров одинаковы. Ящик встряхивают, и через отверстия в перегородках часть шаров переходит из камеры в камеру.

Проведем серию мысленных опытов, заключающихся в последовательном извлечении наугад всех шаров из каждой камеры ящика. Если в опыте с j -той камерой появился шар i -го типа, результату опыта присваивается оценка a_{ij} . После эксперимента рассчитаем средние оценки опытов с первой камерой $\langle a_1 \rangle$, второй $\langle a_2 \rangle$ и т.д. до оценки $\langle a_{p-1} \rangle$ с камерой $p-1$ по формуле

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_{ij} N_{ij}}{N} = \langle a_j \rangle, \quad j = \overline{1, p-1},$$

где N_{ij} – число шаров i -го типа в j -той камере; $N = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m N_{ij}$ – общее число шаров в ящике.

Введя новые обозначения, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\varepsilon_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} = \langle a_j \rangle, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^m N_{ij} / N$; $x_{ij} = N_{ij} / \sum_{i=1}^m N_{ij}$.

Если число шаров достаточно велико, то x_{ij} – доля шаров i -го типа в j -той камере, а ε_j – доля шаров в j -той камере.

Теперь сформулируем обратную задачу, непосредственно относящуюся к основной. Располагая вычисленными значениями осредненных характеристик $\langle a_j \rangle$, оценками каждого опыта a_{ij} , а также зная

$z_i = \sum_{j=1}^p N_{ij} / N$ – долю шаров каждого типа в ящике, требуется определить x_{ij} и ε_j ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$).

Кроме уравнений (1) можно записать уравнения баланса для каждого типа шаров

$$\sum_{j=1}^p \varepsilon_j x_{ij} = z_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

а также уравнения нормировки

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, p}. \quad (3)$$

Таким образом, имеем $m + 2p - 1$ уравнений для определения $2m + p$ неизвестных. Очевидно, что уравнений (1) – (3) недостаточно для того, чтобы найти искомые величины даже в простейшем случае, когда $m = 2$ и $p = 2$. Однако для подобной задачи решение можно сформулировать как наиболее вероятное, если воспользоваться принципом максимальной энтропии. Для этого достаточно максимизировать информационную энтропию, оценивающую неопределенность всех опытов, используя (1) – (3) в качестве ограничений. Энтропия, оценивающая неопределенность опытов с p камерами системы,

$$H = - \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \sum_{i=1}^m x_{ij} \ln x_{ij}.$$

Далее остается лишь формально решить эту задачу.

Наиболее вероятное распределение составов. Перейдем к решению основной задачи. Рассмотрим совокупность аппаратов однократного испарения и (или) однократной конденсации как систему, предназначенную для разделения исходной непрерывной смеси на p продуктов. Очевидно, что число аппаратов при этом будет $p - 1$. Обозначим мольную дифференциальную функцию распределения состава исходной смеси – $Z(\theta)$, аналогичные функции выходных (продуктовых) потоков – $X_j(\theta)$, а мольные доли отборов продуктов – ε_j .

Сформулируем задачу о наиболее вероятном распределении составов между продуктовыми потоками системы.

Следуя формализму Джейнса [2], а также учитывая особенности применения энтропийного метода для описания фазовых переходов многокомпонентных смесей [1], запишем исходную информацию в следующей форме:

$$\sum_{j=1}^p \varepsilon_j X_j(\theta) = Z(\theta), \quad \theta_n \leq \theta \leq \theta_k, \quad (4)$$

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} X_j(\theta) d\theta = 1, \quad j = \overline{1, p}, \quad (5)$$

где θ_n, θ_k – температуры начала и конца кипения исходной смеси.

Уравнение (4) вытекает из материального баланса системы, а выражения (5) есть условия нормировки дифференциальных функций распределения составов. При этом считается, что в выходных потоках присутствуют все микрокомпоненты исходной смеси, хотя бы в сколь угодно малых количествах.

Введем средние значения (математические ожидания) некоторых феноменологических функций $a_j(\theta)$

$$\varepsilon_j \int_{\theta_n}^{\theta_k} a_j(\theta) X_j(\theta) d\theta = \langle a_j \rangle, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (6)$$

где $a_j(\theta) = a_j^0(\theta) - a_p^0(\theta)$; $a_j^0(\theta)$ – предварительно введенная функция, описывающая характерное для данной задачи свойство микрокомпонентов смеси в j -том потоке; $a_j(\theta)$ – та же функция, для которой начало отсчета перенесено в точки $a_p^0(\theta)$.

Уравнения (6) при выводе основных зависимостей играют роль ограничений и показывают, что система находится в состоянии, характеризующемся определенными средними значениями упомянутых выше функций. Число и форма уравнений (6) выбраны исходя из следующих сообра-

жений. Известно [3, 4], что при расчете процесса фазовых переходов в двухфазной системе ($p = 2$) для определения составов и количества продуктов разделения при фиксированной температуре необходимо наложить одно ограничение типа (6). В традиционных методах расчета это эквивалентно принятию состояния термодинамического равновесия. Увеличение числа продуктов разделения приводит к дополнительным степеням свободы и, следовательно, к необходимости введения дополнительных ограничений (6). В общем случае число уравнений (6) должно соответствовать числу ограничений, которые следует наложить на систему (помимо материальных балансов), чтобы поставленная задача приобрела физический смысл.

Разностная форма ограничений (6) выбрана исходя из практики применения энтропийного метода для описания процессов химической технологии [5]. Практика показывает, что начало отсчета для феноменологических функций (коэффициентов в случае дискретных смесей [3, 6]) не имеет значения и его удобно перенести в точки $a_p^0(\theta)$. В этом случае форма конечных уравнений во многих случаях будет совпадать с традиционной.

Решение задачи заключается в отыскании дифференциальных функций распределения составов в продуктовых потоках $X_j(\theta)$ и отборов этих продуктов ε_j при заданных $Z(\theta)$, $a_j(\theta)$ и $\langle a_j \rangle$. Для поиска искомым переменных используем принцип максимальной энтропии непрерывного множества. Это означает, что наиболее правдоподобный (наименее предвзятый) вид функций $X_j(\theta)$ и значения ε_j будет отвечать максимуму информационной энтропии непрерывного множества

$$H = - \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \int_{\theta_n}^{\theta_k} X_j(\theta) \ln X_j(\theta) d\theta$$

при соблюдении ограничений (4) – (6). Такая задача может быть решена вариационным методом и сводится к изопериметрической задаче, т.е. к максимизации вспомогательного функционала

$$F = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \int_{\theta_n}^{\theta_k} [-X_j(\theta) \ln X_j(\theta) + \lambda X_j(\theta) + \mu_j / \varepsilon_j X_j(\theta) + \lambda_j a_j(\theta) X_j(\theta)] d\theta,$$

где λ , μ_j , λ_j ($j = \overline{1, p}$) – неопределенные множители Лагранжа.

В использованной форме записи $\lambda_p = 0$.

Необходимые условия максимума функционала имеют вид

$$\varepsilon_j [-1 - \ln X_j(\theta) + \lambda + \mu_j / \varepsilon_j + \lambda_j a_j(\theta)] = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad (7)$$

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} [-X_j(\theta) \ln X_j(\theta) + \lambda X_j(\theta) + \lambda_j a_j(\theta) X_j(\theta)] d\theta = 0, \quad j = \overline{1, p}. \quad (8)$$

Эти дополнительные $2p$ уравнения совместно с $2p$ ограничениями (4) – (6) дают замкнутую систему уравнений для определения p неизвестных функций $X_j(\theta)$, p значений ε_j и $2p$ множителей λ , μ_j , λ_j .

Далее поочередно исключим из полученной системы неизвестные множители Лагранжа.

Из уравнения (7) получаем при $\varepsilon_j \neq 0$

$$X_j(\theta) = \exp(\lambda + \mu_j / \varepsilon_j + \lambda_j a_j(\theta) - 1), \quad j = \overline{1, p}. \quad (9)$$

Подставив последнее выражение в уравнение (8) и учитывая, что

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} X_j(\theta) d\theta = 1, \text{ находим } \mu_j = \varepsilon_j \quad (j = \overline{1, p}).$$

Теперь уравнение (9) примет вид

$$X_j(\theta) = \exp(\lambda + \lambda_j a_j(\theta)), \quad j = \overline{1, p}. \quad (10)$$

Для определения множителя λ используем уравнение (5), подставив в него найденное значение $X_j(\theta)$. Получим

$$\exp(\lambda) = Z(\theta) / \sum_{j=1}^p \varepsilon_j \exp(\lambda_j a_j(\theta)).$$

Подставив это выражение в (10), находим

$$X_j(\theta) = Z(\theta) \exp(\lambda_j a_j(\theta)) / \sum_{l=1}^p \varepsilon_l \exp(\lambda_l a_l(\theta)). \quad (11)$$

Уравнения нормировки (6) с учетом (11) принимают вид

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} \frac{Z(\theta) \exp(\lambda_j a_j(\theta))}{\sum_{l=1}^p \varepsilon_l \exp(\lambda_l a_l(\theta))} d\theta = 1, \quad j = \overline{1, p}. \quad (12)$$

Для определения множителей λ_j можно воспользоваться ограничениями (6), однако поступим иначе. После решения задачи будем считать заданными не значения $\langle a_j \rangle$, а множители Лагранжа λ_j . Раскроем их физический смысл в этой задаче одновременно с физическим смыслом функций $a_j(\theta)$.

Физический смысл функций $a_j(\theta)$ и лагранжевых множителей λ_j . Разрешим уравнения (11), записанные для потоков j и p , относительно $a_j(\theta)$

$$\frac{X_j(\theta)}{X_p(\theta)} = \exp(\lambda_j a_j(\theta)), \quad j = \overline{1, p-1}.$$

Из последнего уравнения видно, что умножение функций $a_j(\theta)$ на какое-либо число ничего не меняет в постановке и решении задачи. Это означает, что выбор масштаба для этих функций может быть произвольным. При изменении масштаба $a_j(\theta)$ изменится лишь масштаб множителей λ_j . Удобно принять $a_j(\theta)$ такими, чтобы при термодинамическом равновесии потоков j и p получить $\lambda_j = 1$. Таким образом,

$$\frac{X_j^*(\theta)}{X_p^*(\theta)} = \frac{X_j^*(\theta)d\theta}{X_p^*(\theta)d\theta} = \exp(a_j(\theta)),$$

где $X_j^*(\theta)d\theta$, $X_p^*(\theta)d\theta$ – равновесные концентрации микрофракций в потоках j (паре) и p (жидкости).

По определению

$$\frac{X_j^*(\theta)d\theta}{X_p^*(\theta)d\theta} = k_j(\theta),$$

где $k_j(\theta)$ – функция константы фазового равновесия микрокомпонентов смеси от температуры их кипения для j -го потока.

Из последних выражений следует

$$a_j(\theta) = \ln k_j(\theta). \quad (13)$$

Следовательно, если температура и давление потоков j и p одинаковы, то в выражении (11) $a_j(\theta)$ можно заменить логарифмом функции константы фазового равновесия.

Если потоки j и p имеют разные температуры и (или) давления, то заменить $a_j(\theta)$ на $\ln k_j(\theta)$, строго говоря, нельзя и следует пользоваться функциями $a_j(\theta)$. Однако анализ показывает, что на основе энтропийного метода описания можно получить целый ряд известных из теории разделительных систем выводов, если ввести понятие эффективной константы фазового равновесия [4]. Значение такой константы можно рассчитать приближенно, как среднее (например, среднегеометрическое) значений двух констант, отнесенных к температуре и давлению потоков j и p

$$\ln K_j(\theta) = \ln \sqrt{k_j(\theta)k_p(\theta)}, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (14)$$

где $K_j(\theta)$ – функция эффективной константы фазового равновесия микрокомпонентов смеси от температуры их кипения для j -го потока.

При термодинамическом равновесии $k_j(\theta) = k_p(\theta)$ и эффективная константа равна обычной константе фазового равновесия.

При выбранном масштабе множителей λ_j распределению (11) отвечает соотношение $X_j(\theta)/X_p(\theta) = K_j^{\lambda_j}(\theta)$. Значение $\lambda_j = 0$ соответствует одинаковому составу потоков j и p , поэтому можно считать, что множители λ_j являются мерой степени разделения потоков j и p .

Поскольку рассматриваемая система состоит из разделительных элементов (аппаратов), выходные потоки которых равновесны, то лагранжеры множители связаны соотношением $\lambda_j = \lambda_{j+1} + 1$ ($j = \overline{p-1, 1}$). При этом $\lambda_p = 0$, а потоки $p-1$ и p равновесны ($\lambda_{p-1} = 1$).

Как уже отмечалось выше, начало отсчета функций $a_j^0(\theta)$ не имеет значения. Приняв за начало отсчета $a_k^0(\theta)$ ($1 \leq k \leq p$), уравнения (6) можно было бы записать в виде

$$\varepsilon_j \int_{\theta_n}^{\theta_k} [a_j^0(\theta) - a_k^0(\theta)] X_j(\theta) d\theta = \langle a_j \rangle, \quad j = \overline{1, k}, \quad j \neq k.$$

Здесь для правой части оставлено прежнее обозначение. Множители Лагранжа λ_j в этом случае будут характеризовать степень разделения потоков j и k ($\lambda_k = 0$). Для $j = \overline{k-1, 1}$ справедливы соотношения $X_j(\theta)/X_k(\theta) = K_j(\theta)^{\lambda_j}$, $\lambda_j = \lambda_{j+1} + 1$, а для $j = \overline{k+1, p}$ выполняются другие $X_j(\theta)/X_k(\theta) = K_j(\theta)^{-\lambda_j}$, $\lambda_j = \lambda_{j-1} + 1$.

Алгоритмы расчета системы. Вернемся к уравнениям (11) и (12). Теперь с учетом (13) и (14) они принимают окончательный вид

$$X_j(\theta) = Z(\theta) K_j^{\lambda_j}(\theta) / \sum_{l=1}^p \varepsilon_l K_l^{\lambda_l}(\theta), \quad j = \overline{1, p}, \quad (15)$$

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} \frac{Z(\theta) K_j^{\lambda_j}(\theta)}{\sum_{l=1}^p \varepsilon_l K_l^{\lambda_l}(\theta)} d\theta = 1, \quad j = \overline{1, p-1}. \quad (16)$$

Отсюда получаем выражения для концентрации v -той фракции с температурами кипения θ_{nv} и θ_{kv} в j -том продуктовом потоке

$$\int_{\theta_{nv}}^{\theta_{kv}} X_j(\theta) d\theta = \int_{\theta_{nv}}^{\theta_{kv}} \frac{Z(\theta) K_j^{\lambda_j}(\theta)}{\sum_{l=1}^p \varepsilon_l K_l^{\lambda_l}(\theta)} d\theta, \quad j = \overline{1, p}. \quad (17)$$

При $p = 2$ формулы (15) и (16) переходят в известные уравнения для расчета однократного испарения (однократной конденсации) непрерывных смесей

$$\begin{aligned} X_1(\theta) &= Z(\theta) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 / K_1(\theta)), \\ X_2(\theta) &= Z(\theta) / (\varepsilon_1 K_1(\theta) + \varepsilon_2), \\ \int_{\theta_n}^{\theta_k} Z(\theta) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 / K_1(\theta)) d\theta &= 1. \end{aligned}$$

Зависимости (15) и (16) позволяют проводить расчет разделительной системы при двух основных постановках задачи. В каждой постановке необходимо располагать параметрической зависимостью функций констант фазового равновесия от температуры и давления потоков, а функции эффективных констант фазового равновесия (14) рассчитывать с учетом заданных условий отборов продуктов.

В первой постановке заданными величинами являются: плотность распределения состава исходной смеси и условия (температуры и давления) отбора продуктовых потоков. Определению подлежат количества и составы выходных потоков. При такой постановке расходы потоков находятся из условий нормировки (16), а плотности распределения составов выходных потоков – по формулам (15). После этого рассчитываются температуры выходных потоков, и при их существенном отличии от заданных проводится повторный расчет системы с измененными значениями функций эффективных констант фазового равновесия.

Во второй постановке при известных плотности распределения состава исходной смеси и расходах выходных потоков требуется определить составы и условия отбора выходных потоков. В этом случае из условий нормировки (16) определяются температуры потоков, а составы рассчитываются по формулам (15). При выполнении точных расчетов по полученным составам рассчитываются температуры выходных потоков, и при необходимости проводится повторный расчет системы с другими значениями функций эффективных констант фазового равновесия.

Дискретно-непрерывная смесь. Условия нормировки типа (16) для дискретно-непрерывной смеси можно записать в следующем виде

$$\sum_{v=1}^n \int_{\theta_{nv}}^{\theta_{nv}} X_j(\theta) d\theta + \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, p}, \quad (18)$$

где x_{ij} – концентрация i -го компонента в j -том продуктивном потоке; m – число дискретных компонентов в смеси; n – число фракций в смеси, характеризующихся непрерывными кривыми ИТК.

Концентрация x_{ij} определяется выражением [1]

$$x_{ij} = z_i K_{ij}^{\lambda_j} / \sum_{l=1}^p \varepsilon_l K_{il}^{\lambda_l}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (19)$$

где z_i – концентрация i -го компонента в исходной смеси; K_{ij} – эффективная константа фазового равновесия i -го компонента для условий (температуры и давления) j -го потока.

Очевидно, что приведенные выше алгоритмы расчета для непрерывных смесей справедливы и для дискретно-непрерывных смесей, если совместно с (15) – (17) использовать новые уравнения нормировки (18) и выражения для концентраций дискретных компонентов (19).

Практика расчетов. Приведем примеры применения полученных соотношений для расчета систем разделения непрерывных (нефтяных) смесей при двух рассмотренных выше постановках задачи. В приведенных примерах:

- исходная смесь разделяется на пять продуктов ($p = 5$);
- для пятипродуктовой системы: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = 0$;
- молярная функция плотности распределения состава исходной смеси получена в результате аппроксимации экспериментальных данных анализа кривых ИТК;
- давление в системе 0,1 МПа;
- функции констант фазового равновесия непрерывных фракций получены на основании уравнения Ашворта [7]:

$$k_j(\theta) = \exp\left[6.172\left(1 - f(T_j)/f(\theta)\right)\right], \quad j = \overline{1, p-1},$$

где $f(U) = 1250 / \left[\sqrt{(U + 273.16)^2 + 108000} - 307.6\right] - 1$; $U = T_j, \theta$; T_j – температура j -го продуктового потока;

- функции констант фазового равновесия от температуры продуктового потока для дискретных компонентов получены в результате аппроксимации данных [8] полиномом второй степени

$$k_{ij} = a_i + b_i T_j + c_i T_j^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, p-1},$$

где a_i, b_i, c_i – эмпирические коэффициенты, значения которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов аппроксимации

Коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
a_i	105.908	7.78939	-0.06265	0.58820	0.24977	0.22209
b_i	1.67492	0.60132	0.25310	0.04743	0.03199	-0.01466
c_i	-0.00461	-0.00041	0.00024	0.00077	0.00079	0.00045

В первом примере требуется определить количества и составы продуктов разделения нефтесмеси при заданных температурах выходных потоков: $T_1 = 200$ °С, $T_2 = 256$ °С, $T_3 = 320$ °С и $T_4 = 396$ °С. Разделяемая смесь является дискретно-непрерывной и состоит из шести дискретных компонентов (концентрации компонентов приведены в табл. 2) и непрерывной части, функция плотности распределения состава которой описывается уравнением [9]

$$Z(\theta) = \frac{1+a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - T_{50\%}}{\sigma}\right)^2\right], \quad \theta_n \leq \theta \leq \theta_k.$$

Таблица 2. Составы исходной смеси и продуктов разделения

i	Компонент или фракция, °C	$Z(\theta)$	$X_1(\theta)$	$X_2(\theta)$	$X_3(\theta)$	$X_4(\theta)$	$X_5(\theta)$
1	CH ₄	0.0001	0.0018	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	C ₂ H ₆	0.0004	0.0070	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
3	C ₃ H ₈	0.0033	0.0554	0.0023	0.0000	0.0000	0.0000
4	<i>n</i> -C ₄ H ₁₀	0.0024	0.0372	0.0035	0.0001	0.0000	0.0000
5	<i>n</i> -C ₄ H ₁₀	0.0073	0.1112	0.0117	0.0004	0.0000	0.0000
6	ΣC ₅ +C ₆	0.0311	0.3468	0.1147	0.0112	0.0004	0.0000
7	63.74–100	0.0374	0.2728	0.2002	0.0294	0.0012	0.0000
8	100–150	0.0630	0.1469	0.3565	0.1323	0.0109	0.0002
9	150–200	0.0756	0.0200	0.2290	0.2654	0.0493	0.0019
10	200–250	0.0864	0.0011	0.0705	0.2957	0.1375	0.0096
11	250–300	0.0937	0.0000	0.0106	0.1874	0.2423	0.0329
12	300–400	0.1914	0.0000	0.0008	0.0765	0.4393	0.1937
13	400–500	0.1664	0.0000	0.0000	0.0014	0.1105	0.2881
14	500–600	0.1183	0.0000	0.0000	0.0000	0.0084	0.2305
15	600–700	0.0689	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.1358
16	700–800	0.0328	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0647
17	800–900	0.0128	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0252
18	900–1000	0.0041	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0080
19	1000–1100	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0021

Параметры распределения: $a = 0.075$; $\sigma = 221.29$ °C; $T_{50\%} = 330.29$ °C; $\theta_n = 63.74$ °C; $\theta_k = 1100$ °C.

Первоначально находим расходы потоков ϵ_j в результате решения системы нелинейных уравнений (18), записанных для пятипродуктовой системы

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} \frac{Z(\theta)K_j(\theta)^{\lambda_j}}{\sum_{l=1}^5 \epsilon_l K_l(\theta)^{\lambda_l}} d\theta + \sum_{i=1}^6 \frac{z_i K_{ij}^{\lambda_j}}{\sum_{l=1}^5 \epsilon_l K_{il}^{\lambda_l}} = 1, \quad j = \overline{1,4},$$

где $K_j(\theta) = \sqrt{k_j(\theta)k_5(\theta)}$; $K_{ij} = \sqrt{k_{ij}k_{i5}}$.

Получаем:

$$\epsilon_1 = 0.06, \quad \epsilon_2 = 0.07, \quad \epsilon_3 = 0.18, \quad \epsilon_4 = 0.18, \quad \epsilon_5 = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 = 0.51.$$

Для определения температур выходных потоков используем уравнение изотермы паровой фазы дискретно-непрерывной смеси

$$\int_{\theta_n}^{\theta_k} \frac{X_j(\theta)}{k_j(\theta)} d\theta + \sum_{i=1}^6 \frac{x_{ij}}{k_{ij}} = 1, \quad j = \overline{1,4}. \quad (20)$$

Решая уравнение (20) совместно с (15) и (19) для каждого из потоков, находим: $T_1 = 199.4$ °С, $T_2 = 258.3$ °С, $T_3 = 322.6$ °С, $T_4 = 396.0$ °С. Потоки четыре и пять находятся в состоянии термодинамического равновесия, поэтому $T_4 = T_5$.

Поскольку рассчитанные температуры близки к первоначально заданным температурам потоков, уточнение эффективных констант фазового равновесия и повторный расчет не требуются.

Далее по формулам (17) и (19) рассчитываем концентрации узких фракций и дискретных компонентов в выходных потоках, которые приведены в табл. 2.

Рассмотрим второй пример расчета разделительной системы, когда требуется определить температуры и плотности распределения составов выходных потоков при заданных отборах продуктов: $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.10$, $\varepsilon_3 = 0.15$, $\varepsilon_4 = 0.20$, $\varepsilon_5 = 0.50$. Дифференциальная функция распределения состава разделяемой смеси в этом случае описывается уравнением [10]

$$Z(\theta) = \frac{\theta^{n-1} \exp(-\theta/T)}{T^n (n-1)!}, \quad \theta_n \leq \theta \leq \theta_k.$$

Параметры распределения: $n = 3$, $T = 127.9$ °С, $\theta_n = 4.8$ °С, $\theta_k = 1100$ °С.

Температуры выходных потоков определяем в результате решения системы уравнений (16) с учетом зависимости функций констант фазового равновесия от температур потоков T_j и условия $T_4 = T_5$. Находим: $T_1 = 216.9$ °С, $T_2 = 262.3$ °С, $T_3 = 316.2$ °С, $T_4 = T_5 = 390.3$ °С.

Функции плотностей распределения составов продуктовых потоков, рассчитанные по формулам (13), а также исходной смеси приведены на рис. 1.

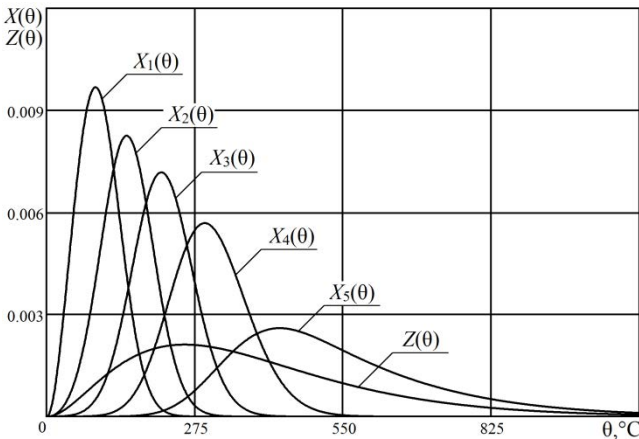


Рис. 1. Функции плотностей распределения составов исходной смеси и продуктов разделения

Заключение. Получен закон наиболее вероятного распределения составов в продуктовых потоках сложных систем разделения непрерывных и дискретно-непрерывных смесей без введения ограничений на степень разделения потоков. Он может быть использован для расчета любых систем, в которых разделение смеси происходит в результате процессов фазовых переходов.

С учетом ранее полученных результатов [1, 4] можно утверждать, что энтропийный метод моделирования позволяет на единой методологической основе проводить расчет систем разделения как дискретных, так и непрерывных смесей, как с равновесными, так и неравновесными выходными потоками, как идеальных, так и неидеальных (атермальных) растворов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балунов А.И.* Энтропийный метод моделирования фазовых переходов в сложных системах разделения многокомпонентных смесей / А.И. Балунов, П.В. Куделин // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, Изд-во ЯГТУ, 2015. С. 97-105.
2. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistical Mechanics // I. The Physical Review. 1957. V. 106. N4. P. 620–630. II. The Physical Review. 1957. V. 108, N2. P. 171–190.
3. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2003. Т. 46, вып.9. С. 54-67.
4. *Балунов А.И.* Расширенный принцип максимальной энтропии для описания процесса фазовых превращений в атермальной системе / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2014. Т. 57, вып.12. С. 93-99.
5. Энтропийные методы моделирования в химической технике / под ред. В.П. Майкова. М.: МИХМ, 1981. 88 с.
6. *Майков В.П.* Ректификация атермальных смесей. Системно-информационный подход / В.П. Майков, А.И. Балунов М.: МИХМ, 1979. 88 с.
7. *Сарданашвили А.Г.* Примеры и задачи по технологии переработки нефти и газа / А.Г. Сарданашвили, А.И. Львова. М.: Химия, 1980. 256 с.
8. *Багатуров С.А.* Основы теории и расчета перегонки и ректификации. М.: Химия, 1974. 440 с.
9. *Эйгенсон А.С.* Закономерности компонентно-фракционного и химического состава нефтей / А.С. Эйгенсон, Д.М. Шейх-Али // Химия и технология топлив и масел. 1973. №1. С.1-5.
10. *Балунов А.И.* Аппроксимация данных анализа фракционного состава нефти кривой разгона многоемкостного объекта / А.И. Балунов, М.П. Цыганков, А.Е. Зуев // Вопросы современной науки и практики / Ун-т им. В.И. Вернадского. 2014. № 4 (54). С. 42-45.

УДК 532.59

Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров, С. Е. Кокин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: belonozhko@mail.ru

**О МЕТОДИКЕ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА
ДЛЯ ОБЪЯСНЕНИЯ РАЗНИЦЫ
В ЛАГРАНЖЕВОМ И ЭЙЛЕРОВОМ ПОДХОДАХ
К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ**

Показано, что эйлерово и лагранжево описание поля скоростей в механике сплошных сред по-разному соотносятся с требованием учета эффекта Доплера при переходе к описанию движения в новую систему координат, равномерно движущуюся относительно исходной системы отсчета.

Ключевые слова: волновое движение, эффект Доплера, переменные Лагранжа, переменные Эйлера.

D.F. Belonozhko, A.A. Otchirov, S. E. Kokin

*P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: belonozhko@mail.ru*

**ON A METHOD OF USING OF DOPPLER EFFECT
FOR EXPLAINING THE DIFFERENCE
BETWEEN LAGRANGE AND EULER APPROACHES
TO DESCRIPTION OF FLUID MOTION**

It is shown that the Euler and Lagrange description of the velocity field in continuum mechanics differently correlate with the accounting requirements of the Doppler Effect which appears owing to transition to a new coordinate system moving relative to the initial one.

Keywords: wave motion; Doppler Effect; Euler's variables; Lagrange variables.

В механике сплошных сред используется два основных способа описания течений: эйлерово (описание в переменных Эйлера) и лагранжево (описание в переменных Лагранжа). Для решения большинства практических задач используются переменные Эйлера. В эйлеровом описании поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ определяет скорость жидких частиц, которые с течением времени t проходят через фиксированную точку пространства, поло-

жение которой задается радиус-вектором \mathbf{r} . В переменных Лагранжа $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл скорости «меченной» жидкой частицы, которая в начальный момент времени $t = 0$ находилась в положении \mathbf{r} . Переменные Лагранжа в большинстве случаев используются для фундаментальных теоретических построений, доказывающих и иллюстрирующих основные законы механики сплошных сред. Взаимосвязи этих двух способов описания гидродинамических течений в учебной литературе уделяется, как правило, не более одного-двух параграфов. Чаще всего, в учебнике на самом элементарном уровне разбираются некоторые наиболее простые течения, которые можно описать обоими способами, и сообщается об эквивалентности переменных Эйлера и Лагранжа. Между тем, ряд простых, и в то же время показательных для понимания примеров течений, остается вне рассмотрения. Один из таких примеров и является предметом настоящего сообщения.

Пусть течение сплошной среды происходит в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, а некоторая количественная характеристика течения изменяется по закону, который в эйлеровом представлении описывается выражением типа бегущей волны:

$$\xi = a \exp(i(\omega t - kx)). \quad (1)$$

Здесь a и k - константы, описывающие амплитуду волны и ее волновое число; ω - круговая частота волнового движения, i - мнимая единица. Будем считать, что физический смысл имеет только действительная часть соотношения (1). Проследим за изменением величины ξ , обусловленным переходом наблюдателя в новую систему координат $O'x'y'z'$, которая в начальный момент времени совпадала со старой лабораторной системой $Oxyz$ и которая движется относительно нее с постоянной скоростью U вдоль оси Ox . Связь старых и новых координат описывается преобразованиями Галилея: $x = x' + Ut$; $y = y'$; $z = z'$; $t = t'$. Время в обеих координатных системах считаем согласованным. Соответственно для фазы величины ξ получаем очевидное правило преобразования: $\omega t' - k(x' + Ut) = (\omega - kU)t - kx'$. Отсюда естественным образом следует закон преобразования ξ

$$\xi = a \exp(i(\omega t - kx)) \rightarrow \xi' = a \exp(i(\omega' t' - kx')); \quad (2)$$
$$\omega' = \omega - kU.$$

В полном соответствии с эффектом Доплера наблюдатель, оказавшийся в движущейся системе отсчета, будет наблюдать волновое измене-

ние величины ξ с новой круговой частотой $\Omega = \omega - kU$.

Пусть теперь выражение

$$\zeta = a \exp(i(\omega t - k x_0)) \quad (3)$$

описывает изменение величины ζ в той же лабораторной системе $Oxuz$, но на этот раз с помощью лагранжевых переменных. Это означает, что входящая в соотношение (3) координата x_0 имеет смысл начального положения жидкой частицы, для которой отслеживается физическая характеристика ζ . В начальный момент времени оси $Ox = O'x'$ совпадают, и поэтому для обеих координатных систем: $x_0 = x'_0$. Это означает, что при переходе наблюдателя в движущуюся систему координат лагранжево описание эволюции величины ζ останется прежним:

$$\zeta = a \exp(i(\omega t - k x_0)) \rightarrow \zeta' = a \exp(i(\omega' t' - k x'_0));$$

$$t = t'; \quad x_0 = x'_0.$$

Получается, что в лагранжевых переменных эффект Доплера себя не проявляет. Между тем нужно понимать, что мы здесь просто имеем дело с одинаковыми по строению выражениями, записанными в разных представлениях и потому имеющими различный физический смысл. Переменная ξ описывает некий распределенный в пространстве волновой процесс. Наблюдатель, «догоняя» и даже «обгоняя» гребни волн имеет возможность «регулировать» быстроту их прохождения мимо себя, а значит, и круговую частоту ω' в полном согласии с эффектом Доплера. Физический смысл переменной ζ совсем другой – это колебание величины ζ , локализованное в месте положения перемещающейся жидкой частички. В рамках классической механики период локализованного циклического движения (например, стрелки часов) наблюдатель видит из всех движущихся с разной скоростью систем отсчета совершенно одинаково.

В качестве примера применения изложенной идеи, рассмотрим один качественный способ оценки дрейфового движения частиц на границе раздела двух идеальных жидкостей. Известно, что если по горизонтальной поверхности жидкости распространяется периодическая волна с круговой частотой ω , волновым числом k и амплитудой A , то частицы среды, расположенные непосредственно на поверхности, участвуют в довольно сложном движении. Они совершают петлеобразные перемещения в вертикальной плоскости и дрейфуют в направлении распространения волны. С точки зрения неподвижного наблюдателя, частичка жидкости, расположенная на поверхности, благодаря волновому движению, вовлекается в

движение по петлеобразным траекториям. Частота этого движения совпадает с ω . Если проследить за движением жидкой частички в течение одного периода $T = 2\pi / \omega$, то окажется, что виток ее траектории асимметричен: его нижняя часть меньше верхней вследствие затухания движения с глубиной. Через период частичка возвращается не в исходное положение, а в несколько смещенное по сравнению с ним в направлении распространения волны. С каждым новым витком это смещение накапливается и складывается в общий средний дрейф (т.н. дрейф Стокса) со скоростью $A^2 \omega k$. Что будет, если волна распространяется по границе раздела двух идеальных жидкостей? В ситуации, когда обе жидкости неподвижны относительно друг друга, результат получится тот же самый. Конечно, частота ω будет определяться более сложным дисперсионным уравнением. Если же верхняя жидкость еще и двигается вдоль поверхности раздела, то ситуация существенно изменится. Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

Будем считать верхнюю жидкость менее плотной, чтобы не произошло перемешивания за счет неустойчивости Рэля-Тейлора [1]. Пусть верхняя среда движется со скоростью U относительно нижней вдоль направления распространения волны. Положим, что поверхностное натяжение на границе раздела достаточно для противодействия началу неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [1], вызываемой скачком тангенциальной компоненты скорости. В таких условиях дрейф частиц со стороны нижней жидкости будет снова происходить в направлении распространения волны и снова со скоростью $V_{down} = A^2 \omega k$, поскольку вызывающие его причины остались прежними. Если же говорить о частичках верхней жидкости, прилегающих к поверхности раздела, то они, очевидно, участвуют в общем движении со скоростью U в направлении распространения волны. Но волновое движение заставляет их циркулировать в вертикальной плоскости и участвовать в дополнительном горизонтальном смещении за счет асимметричности витков-траекторий. Чтобы оценить это смещение, нужно заметить, что для наблюдателя,двигающегося вместе с верхней жидкостью, картина волнового движения и механизм дрейфа будут аналогичными тому, что видит неподвижный наблюдатель в нижней жидкости. Благодаря эффекту Доплера наблюдаемое движущимся наблюдателем волновое движение будет иметь частоту $\omega' = \omega - kU$ и, значит, скорость регистрируемого им дрейфа будет $A^2(\omega - kU)k$. Следует заметить, что это скорость индивидуальных жидких частиц в лагранжевом описании, и поэтому обратный переход в неподвижную систему координат ни с какими изменениями частоты не связан. Отсюда следует, что неподвижный наблюда-

тель будет фиксировать горизонтальное движение частиц верхней жидкости со скоростью $V_{up} = U + A^2(\omega - kU)k$. Пока скорость движения верхней среды меньше фазовой скорости волны $U < \omega/k$ добавочный дрейф верхней жидкости имеет то же направление, что и ее скорость U . При $\omega/k = U$ добавочный дрейф в верхней жидкости исчезает, а ее частички перестают совершать циклические движения, участвуя только в горизонтальном перемещении со скоростью U . Если выполняется условие $U > \omega/k$, то добавочный дрейф в верхней жидкости становится направленным против ее общего движения.

Рассмотренный пример показывает, что понимание смысла эйлеровых и лагранжевых переменных в свете их взаимоотношения с эффектом Доплера позволяет качественным языком анализировать свойства довольно сложного волнового движения без решения соответствующих гидродинамических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фабер Т.Е.* Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.

УДК 66.048.05.004.6

Г. Г. Вилков

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vilkovgg@ystu.ru

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫМИ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Проведен системно-информационный анализ разделительных систем, в которых осуществляются процессы ректификации, абсорбции и десорбции. Приведена методика их анализа с целью установления общих свойств оптимально организованных систем. Получены условия оптимальности. Показано, что использование некоторых условий оптимальности даёт возможность совместного решения задач проектирования оптимальных разделительных систем и оптимального управления ими.

Ключевые слова: ректификация, абсорбция, десорбция, информационный критерий относительной организованности, условие оптимальности, проектирование оптимальных разделительных систем, оптимальное управление разделительными системами.

G. G. Vilkov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vilkovgg@ystu.ru

DESIGN AND CONTROL OF CHEMICAL PROCESS SEPARATION SYSTEMS

A systemic and information analysis that has been performed for separation systems where rectification, absorption and desorption processes are carried out. A method for their analysis is provided in order to define common properties of optimally organized systems. Optimality conditions have been found. It is shown that application of certain optimality conditions allows a simultaneous solution of such tasks as designing optimal separation systems and optimal control of such systems.

Keywords: *rectification, absorption, desorption, information criterion of relative entropy, optimality condition, designing optimal separation systems, optimal control of separation systems*

Одним из эффективных средств интенсификации разделительных химико-технологических систем (РХТС) является их оптимизация. Оптимизацию проводят как при проектировании РХТС, так и при управлении ими.

Традиционная постановка оптимизационной задачи (постановка I) заключается в нахождении управлений U^* , доставляющих экстремум критерию оптимальности $Q = Q(X, U)$ при выполнении ограничений $\Psi(X, U) \leq 0$ и связях $\varphi(X, U) = 0$. Здесь X – координаты объекта оптимизации; Ψ – ограничения на конструктивные и режимные параметры, а также на качество получаемых продуктов разделения; φ – уравнения баланса массы и энергии (математическая модель РХТС).

Во многих случаях решение этой задачи сводится к многомерному перебору вариантов, модифицированному за счет применения различных форсирующих процедур. Однако сложность математических моделей РХТС и высокая размерность вектора управлений не позволяют зачастую получить количественные результаты оптимизации даже при использовании современных методов математической теории оптимального управления.

Задачи оптимального проектирования (ОП) и оптимального управления (ОУ) являются взаимосвязанными. Управление осуществляется технологическими аппаратами, конструктивные параметры которых были вычислены при ОП. С другой стороны, ОП не может проводиться без учета того, что технологические аппараты будут оснащены системами управле-

ния, сложность, качество работы и стоимость которых в значительной степени зависят от статических и динамических свойств аппаратов, как объектов управления.

Однако на практике эти задачи решаются раздельно. Для раздельного решения имеется ряд причин. Главная из них – такой путь более прост, а во многих случаях и единственно возможен. Раздельному решению способствует применение различных критериев оптимальности: проектирование обычно осуществляется по критерию приведённые затраты, при управлении же используются такие критерии, как энергозатраты, производительность, прибыль и др.

При раздельном решении задач ОП и ОУ возникает ряд проблем. Одна из них заключается в следующем: значения управлений (режимные параметры), оптимальные в смысле приведённых затрат, в общем случае не будут совпадать со значениями этих же управлений, оптимальными, например, с точки зрения минимума энергозатрат (множества оптимальных управлений при решении задач ОП и ОУ не пересекаются (рис.1, а)). Какую комбинацию таких оптимальных управлений необходимо реализовывать при функционировании РХТС? Если первую, то такие управления не будут оптимальными по отношению к минимуму энергозатрат. Другими словами, будет осуществляться неоптимальное управление оптимальной конструкцией. Если вторую, то аналогично можно показать, что в этом случае оптимально управляется неоптимальная конструкция. Понятно, что было бы желательно оптимально управлять оптимальной конструкцией.

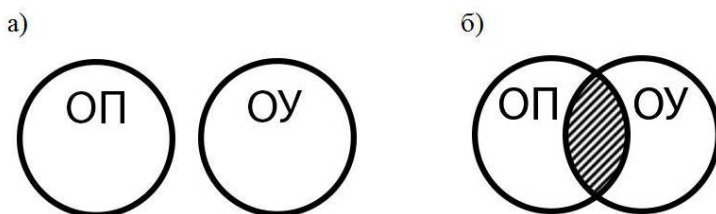


Рис. 1. Множества оптимальных управлений при решении задач ОП и ОУ

Другая проблема связана с присутствием в экономических критериях оптимальности цен на сырьё, энергоресурсы, товарные продукты. В задачах ОУ изменения цен учесть не сложно. Но при решении математически строго поставленной задачи ОП и результаты такого решения будут зависеть от цен. Однако с зависимостью оптимальных значений конструктивных параметров РХТС от цен, формируемых складывающейся ситуацией на рынке, согласиться трудно.

По-видимому, можно говорить о некоторой объективно существующей противоречивости в приведенном выше смысле задач ОП и ОУ, которая затрудняет создание надежных инженерных методов совместного решения задач ОП и ОУ. Это нередко приводит к отказу от оптимизации вообще. При раздельном решении снижается эффективность функционирования РХТС, возникают трудности при создании рациональных систем управления ими.

Ниже рассматривается подход к оптимизации РХТС, который основывается на более общих исходных предпосылках – на идеологии системно-информационного подхода к оптимизации [1]. Он направлен на установление общих свойств оптимально организованных РХТС различных классов и использование этих свойств для решения задач их оптимизации.

Заменим постановку I оптимизационной задачи на другую на основе следующих эвристических рассуждений. Для осуществления любого технологического процесса необходимы три составляющих – вещество, энергия и информация (знания о том, как наиболее целесообразно использовать вещество и энергию). При этом одну и ту же цель можно достичь, используя различные комбинации величин этих составляющих. Опыт функционирования экономических систем показывает, что добиваться цели за счёт вовлечения в технологический процесс дополнительного количества вещества и энергии есть экстенсивный путь развития. Если есть возможность выбора, то выгоднее интенсивный путь, который ориентируется на вовлечение дополнительного количества информации (совершенствование технологии, выбор наилучших значений управлений и т.п.) при относительно неизменном количестве вещества и энергии.

В новой постановке II исходная оптимизационная задача разбивается на две последовательно решаемые подзадачи. Первая подзадача: найти управления U^* , доставляющие максимум новому критерию η при $\varphi(X, U) = 0$ и неизменном количестве используемой энергии (вещества). Здесь энергия (вещество) однозначно определяют критерий Q , а η – критерий, связанный с результатами функционирования объекта оптимизации и характеризующий его эффективность. Вторая подзадача: найти минимальное количество энергии (вещества), при котором в условиях поддержания $\varphi(X, U) = 0$ и $U = U^{**}$ выполняются ограничения $\Psi(X, U) \leq 0$ (обозначения * и ** относятся к оптимальным значениям управлений при разных количествах энергии (вещества)).

Переход от традиционной постановки I к постановке II определяется возможностью выбора между интенсивным и экстенсивным путями воздействия на объект оптимизации и существует не для всех РХТС. Будем считать, что такая возможность может иметь место только для доста-

точно сложных объектов оптимизации, характеризующихся наличием большого числа управлений и разнообразием своего поведения. В связи с невозможностью вычислить нижнюю границу сложности, при которой еще существуют альтернативные варианты воздействия, для решения вопроса выбора интенсивного или экстенсивного пути оптимизации объект оптимизации должен быть проанализирован по специальной методике [2]. Она базируется на идеях системно-информационного подхода, использует математические модели разделительных процессов и включает в себя следующие этапы.

1. Формирование информационного критерия относительной организованности исследуемой РХТС $\eta = (H_{\text{вх}} - H_{\text{вых}})/H_{\text{вх}}$, где $H_{\text{вх}}$ и $H_{\text{вых}}$ – информационные энтропии входных и выходных потоков РХТС. Критерий η безразмерен, нормирован, не содержит цен и поэтому в приведенной форме записи универсален. Конкретный вид критерия η различен для РХТС различных классов.

2. Анализ влияния на степень организованности РХТС, оцениваемую критерием η , различных управлений. По характеру влияния они разделяются на интенсивные управления ($U^{\text{инт}}$), при варьировании которыми можно добиться увеличения критерия η при относительно неизменных затратах энергии (вещества), и экстенсивные управления ($U^{\text{экс}}$), при варьировании которыми можно добиться увеличения критерия η лишь при возрастании затрат энергии (вещества).

3. Постановка II оптимизационной задачи, которая записывается в следующем виде:

$$\min_{U^{\text{экс}}} \max_{U^{\text{инт}}} \eta(X, U^{\text{инт}}, U^{\text{экс}}) \quad (1)$$

при выполнении ограничений $\Psi(X, U^{\text{инт}}, U^{\text{экс}}) \leq 0$ и связях $\varphi(X, U^{\text{инт}}, U^{\text{экс}}) = 0$. Здесь критерий η выступает в роли показателя энергетических (неэнергетических) затрат.

4. Решение оптимизационной задачи (1) и получение условий оптимальности анализируемого класса РХТС.

Разработанная методика применена для анализа РХТС различных классов с целью их последующей оптимизации. Разделяются близкие к идеальному многокомпонентные смеси.

Ректификационные системы без рециклов. В одиночной ректификационной колонне интенсивными управлениями являются доля отбора дистиллята $\varepsilon = D/F$, где D , F – мольные расходы дистиллята и питания соответственно, место ввода питания; экстенсивными управлениями – расход орошения и число теоретических ступеней разделения (ТСР). Макси-

муму критерия η по интенсивным управлениям отвечают следующие условия оптимальности [3, 4]:

- при достаточно четком разделении доля отбора дистиллята равна сумме относительных мольных концентраций компонентов питания z_i , которые обогащаются в дистиллят

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^k z_i, \quad (2)$$

где k – номер наиболее тяжелого компонента, обогащаемого в дистиллят;

- изменения экстенсивных управлений в достаточно широком диапазоне не влияют на условие оптимальности (2);

- оптимальное место ввода питания не зависит от изменения F и z_i , если при этом соблюдается условие (2).

Выбор оптимального места ввода питания представляет собой самостоятельную задачу, которая исследована в [5].

Для многоколонных ректификационных ХТС максимум критерия η по интенсивным управлениям достигается при выполнении условия оптимальности (2) на каждой ректификационной колонне независимо от способа их соединения.

Для иллюстрации рассмотрим решение задачи оптимизации на примере трехколонной ХТС, схема которой представлена на рис. 2, где x_{ij}^+ , x_{ij}^- – мольные концентрации i -го компонента в дистилляте (+) и кубовом продукте (-) j -той колонны. Здесь четырехкомпонентная смесь состава z_{11}, \dots, z_{41} разделяется на продукты с заданными концентрациями x_{11}^+ и x_{33}^- .

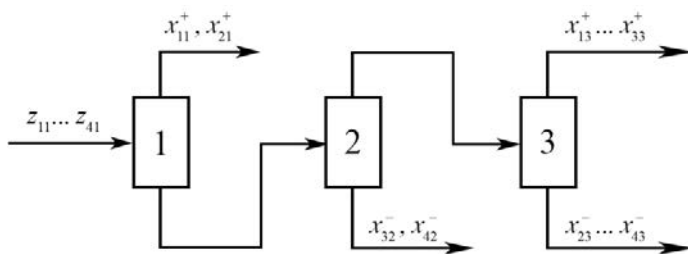


Рис. 2. Схема ректификационной ХТС без рецикла

Решением минимаксной задачи (1) являются уравнения (2), записанные для каждой колонны, а также уравнение

$$\frac{x_{23}^- x_{33}^+ x_{42}^-}{x_{23}^+ x_{32}^- x_{43}^-} = 1. \quad (3)$$

Структура комплекса концентраций в левой части условия оптимальности (3), а также число подобных комплексов индивидуальны для различных ректификационных ХТС и постановок задач их оптимизации [6, 7].

Ректификационные системы с рециклом. Наличие в ХТС рециркуляционного продуктового потока подразумевает повторную переработку вещества, а это связано с непроизводительными затратами. Однако организация таких потоков становится оправданной в случаях, когда, например, необходимо исключить потери дефицитного продукта или при наличии дополнительных технологических требований (недопущение полимеризации или кристаллизации продуктов разделения и т.п.).

Рассмотрим ректификационную ХТС для выделения из четырехкомпонентной смеси продуктов с заданными концентрациями второго и четвертого компонентов. Кроме этого, необходимо исключить потери четвертого компонента в другие потоки. Возможный вариант схемы такой ХТС приведён на рис. 3.

В результате решения задачи (1) получены четыре условия оптимальности: уравнения (2), записанные для каждой колонны, и уравнение

$$x_{33}^- = x_{33}^+ = x_{32}^+ \quad (4)$$

Более подробно вопросы оптимизации ректификационных ХТС с рециклами рассмотрены в [8].

При выводе уравнений (3) и (4) была использована концепция четкого разделения, согласно которой число компонентов, распределяющихся одновременно между дистиллятом и кубовым продуктом каждой ректификационной колонны, не больше двух.

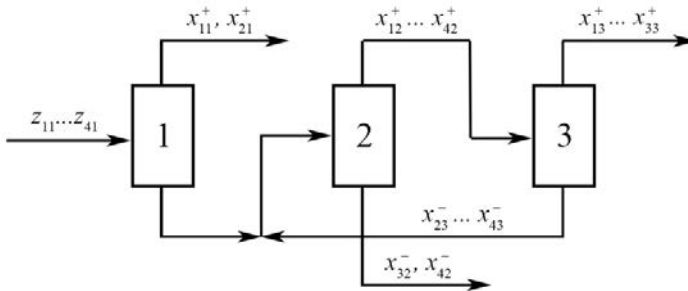


Рис. 3. Схема ректификационной ХТС с рециклом

Разделительные системы «Фракционирующий абсорбер–ректификационная колонна (ФА–РК)» (рис. 4, а). В такой ХТС интенсивными управлениями являются мольные расходы дистиллята РК и циркулирую-

шего абсорбента ФА, соотношение между числами ТСР во ФА и РК ($N_{\text{ФА}}/N_{\text{РК}}$), места ввода питания во ФА и РК; экстенсивными – расход орошения в РК и общее число ТСР в системе ($N_{\text{ФА}} + N_{\text{РК}}$) [9].

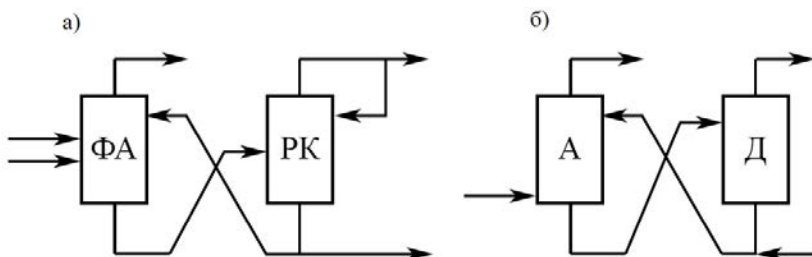


Рис. 4. Схемы материальных потоков разделительных систем ФА–РК (а) и А–Д (б)

Решением задачи поиска максимума критерия η по интенсивным управлениям являются условие оптимальности (2) для РК и равенство числа ТСР в обоих аппаратах

$$N_{\text{ФА}} = N_{\text{РК}}. \quad (5)$$

Разделительные системы «абсорбер–десорбер (А–Д)» (рис. 4, б). Максимуму критерия η , оценивающего степень разделения исходной газовой смеси, при фиксированном общем числе ТСР в системе отвечает равенство ТСР в абсорбере и десорбере [10]

$$N_{\text{А}} = N_{\text{Д}}. \quad (6)$$

Выбор оптимального значения расхода десорбента производится в результате минимизации экономического критерия, определяющего затраты на разделение.

Анализ полученных результатов даёт возможность сделать следующие выводы.

Условия оптимальности, полученные в результате решения задачи (1), отражают взаимосвязь между веществом, энергией и информацией в оптимально организованных РХТС и включают в себя две группы уравнений. Первая группа – условия оптимальности, полученные при максимизации критерия η по интенсивным управлениям, например, (2), (5), (6). Они позволяют добиться максимально возможного разделения при относительно неизменном количестве вещества и энергии (неэнергетических и энергетических затрат) – за счёт подвода к РХТС информации. Такие условия оптимальности не могут противоречить ни одной экономической обоснованной оптимизационной задаче. Это означает, что они должны применяться как при проектировании оптимальных РХТС, так и при оптималь-

ном управлении ими. Графически это иллюстрируется рис. 1, б, где множества оптимальных управлений при решении задач ОП и ОУ пересекаются. Полученные условия оптимальности – это математические соотношения, описывающие заштрихованную область. Их использование предоставляет возможности для совместного проектирования и управления. Вторая группа уравнений – условия оптимальности, полученные при минимизации критерия η по экстенсивным управлениям, например, (3), (4). Они отражают компромисс между веществом и энергией. В общем случае вид таких уравнений зависит от применяемого критерия оптимальности.

Чем сложнее РХТС, тем большее число условий оптимальности можно получить при её анализе на базе системно-информационного подхода и тем самым в большей степени понизить размерность вектора управлений. Поэтому трудоёмкость решения задачи оптимизации увеличивается незначительно, а иногда остаётся прежней.

В отдельных случаях управления РХТС не удаётся разделить на группы интенсивных и экстенсивных. Это означает, что исследуемая РХТС имеет сложность, недостаточную для возникновения в ней общих свойств. В таких случаях необходимо увеличить сложность РХТС, например, путём присоединения к ней последующих в технологической цепи аппаратов, и проводить анализ более сложной РХТС. Если усложнение невозможно, то оптимизация такой РХТС может быть проведена только в традиционной постановке I.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2003. Т. 46, вып.9. С. 54-67.
2. *Вилков Г.Г.* Оптимизация разделительных химико-технологических систем на основе информационного подхода // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1995. Т.38, вып.6. С.79-83.
3. *Гальцов А.В.* Термодинамически оптимальные условия многокомпонентной ректификации / А.В. Гальцов, В.П. Майков, // Теоретич. основы хим. технологии. 1973. Т.VII, № 2. С.170-175.
4. *Балунов А.И.* Оптимальный отбор продуктов в процессе ректификации. Энтروпийно-информационный анализ / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2013. Т. 56, вып. 4. С.97-106.
5. *Балунов А.И.* Выбор оптимального места ввода питания в колонну при многокомпонентной ректификации / А.И. Балунов, А.Г. Саткунас, Г.Г. Вилков // Мат. методы в технике и технологиях - ММТТ: сб. тр. XXVI Междунар. науч. конф. 2013. Т.2. С.29-33.
6. *Майков В.П.* Термoeкономическое оптимальное проектирование многоколонных ректификационных установок / В.П. Майков, Г.Г. Вилков, А.В. Гальцов // Химия и технология топлив и масел. 1971. № 6. С.19-26.

7. Майков В.П. Уравнения для декомпозиции ректификационных систем без рециклов // Теоретич. основы хим. технологии. 1975. Т. IX, № 1. С.104-112.
8. Вилков Г.Г. Оптимизация ректификационных систем с рециклами // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1994. Т. 37, вып.7-9. С.152-157.
9. Вилков Г.Г. Анализ разделительной системы фракционирующей абсорбер-ректификационная колонна / Г.Г. Вилков, А.И. Балунов, М.А. Васильев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1981. Т. XXIV, вып.11. С.1441-1445.
10. Майков В.П. Аналитический метод расчета оптимальной статике процесса абсорбции-десорбции / В.П. Майков, В.И. Мурашко // Теоретич. основы хим. технологии. 1975. Т. IX. № 6. С.828-833.

УДК 330.4

Ю. Д. Гальцева, Е. Ю. Лискина

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: yulya-galceva@yandex.ru, e.liskina@rsu.edu.ru

ПОСТРОЕНИЕ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИЙ

В представленной статье методами регрессионного анализа проводится оценка зависимости объема инвестиций в основной капитал от стоимости основных фондов экономики, среднегодовой численности занятых в экономике, числа зарегистрированных предприятий. Обосновывается вид уравнения регрессионной модели инвестиций. Данная работа является частью исследования особенностей инвестиционной привлекательности регионов Российской Федерации.

Ключевые слова: инвестиции, инвестиционная привлекательность, регрессионный анализ.

Y. D. Galceva, E. U. Liskina

Ryazan State University named for S. Yesenin
Russia, Ryazan, e-mail: yulya-galceva@yandex.ru, e.liskina@rsu.edu.ru

CONSTRUCTION OF REGRESSION MODELS OF INVESTMENTS

In this paper we give the dependence of the volume of investments on the value of fixed assets of the economy, average annual number of employees and number of registered enterprises by methods of regression analysis. We prove the equation of the regression model of investment. This paper is the part of research of the specificity of investment attraction of Russian Federation's regions.

Keywords: investments, investment attraction, regression analysis.

1. Введение. Инвестиции являются важным фактором экономического развития как на микроуровне (для предприятий), так и на макроуровне (для регионов и стран). В России остро стоит проблема инвестиций, обусловленная наличием проблем благоприятности экономической системы страны. Совокупность количественных и качественных условий, формирующих представление о благоприятности экономической системы, называют инвестиционной привлекательностью и инвестиционным климатом. Исследованиям этих экономических категорий посвящено большое количество работ (достаточно полный обзор представлен в [1]). Как правило, они представляют собой рейтинги экономических субъектов по различным критериям. Наиболее известны из них Национальный рейтинг состояния инвестиционного климата в субъектах РФ [2] и исследование инвестиционного климата регионов России [3].

Однако рейтинги только выявляют проблемы в инвестировании, но не показывают степени влияния факторов, определяющих инвестиционный климат в регионах. Более того, в [3] указано, что рейтинговые оценки инвестиционной привлекательности и инвестиционного климата следует дополнять исследованием корреляционных и регрессионных взаимосвязей между определяющими их факторами. Поэтому актуальной является проблема оценки степени влияния экономических факторов на объем инвестиций в регионах, что позволит создать регрессионную модель инвестиций.

2. Отбор факторов и оценка их значимости для регрессионной модели инвестиций. Для построения регрессионной модели инвестиций в качестве регрессоров были выбраны следующие экономические факторы:

- K – стоимость основных фондов экономики;
- L – среднегодовая численность занятых в экономике;
- N – число зарегистрированных предприятий.

Зависимой переменной является объем инвестиций в основной капитал I . Источник числовых данных по выбранным факторам – статистический сборник «Регионы России. Социально-экономические показатели» [4]. Рассматривались данные с 1995 по 2013 годы. Вычисления проводились методами регрессионного анализа [5] на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Цель представляемой работы – выявление вида наилучшей регрессионной зависимости объема инвестиций в основной капитал от стоимости основных фондов экономики, среднегодовой численности занятых в экономике и числа зарегистрированных предприятий.

Задачи исследования:

- выявление вида наилучшей регрессионной зависимости объема инвестиций в основной капитал от каждого из регрессоров; критерием служит величина R^2 ;
- обоснование вида уравнения множественной регрессии объема инвестиций в основной капитал от перечисленных факторов.

При исследовании вида зависимости объема инвестиций в основной капитал от стоимости основных фондов экономики наилучшей по величине R^2 получилась зависимость вида $\ln I = a_K \ln K$. Уравнение и его коэффициенты значимы на уровне значимости $\alpha = 0,05$ для каждого года. Динамика величины R^2 представлена на рис. 1.

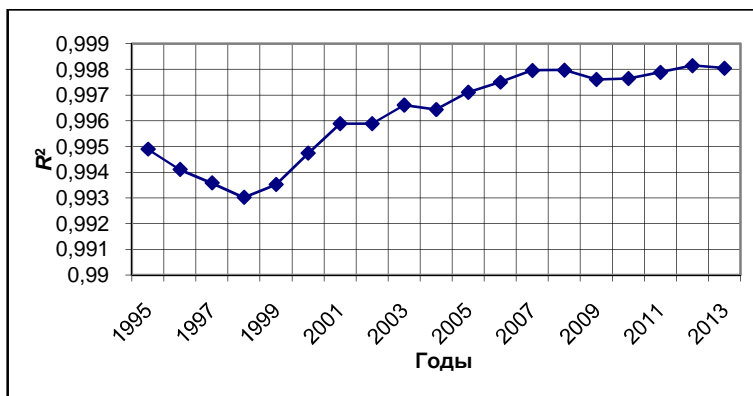


Рис. 1. Динамика величины R^2 зависимости $\ln I = a_K \ln K$

При исследовании вида зависимости объема инвестиций в основной капитал от среднегодовой численности занятых в экономике наилучшей по величине R^2 получилась зависимость вида $\ln I = a_{0L} + a_L \ln L$. Уравнение и его коэффициенты значимы на уровне значимости $\alpha = 0,05$ для каждого года. Динамика величины R^2 представлена на рис. 2.

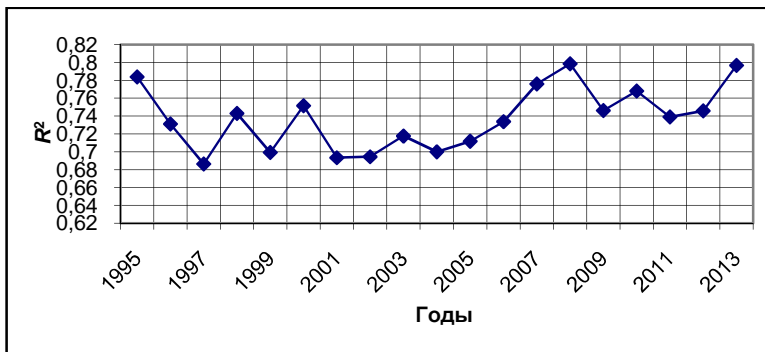


Рис. 2. Динамика величины R^2 зависимости $\ln I = a_{0L} + a_L \ln L$

При исследовании вида зависимости объема инвестиций в основной капитал от числа зарегистрированных предприятий наилучшей по величине R^2 получилась зависимость вида $\ln I = a_{0N} + a_N \ln N$. Уравнение и его коэффициенты значимы на уровне значимости $\alpha = 0,05$ для каждого года. Динамика величины R^2 представлена на рис. 3.

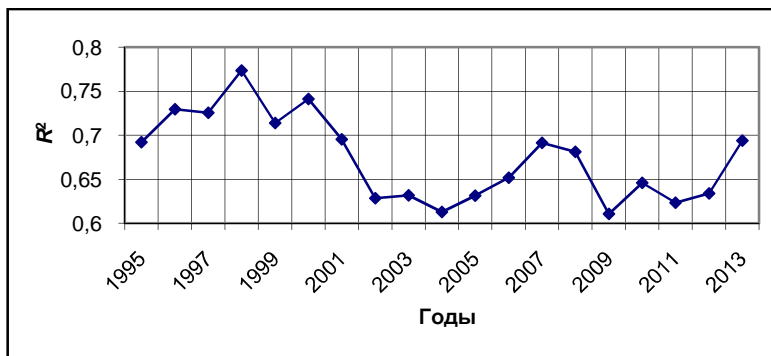


Рис. 3. Динамика величины R^2 зависимости $\ln I = a_{0N} + a_N \ln N$

3. Множественная регрессионная модель инвестиций и ее исследование. Допуская равное влияние регрессоров на объясняющую переменную I , было сделано предположение, что множественная регрессионная модель инвестиций имеет вид

$$\ln I = a_0 + a_K \ln K + a_L \ln L + a_N \ln N. \quad (1)$$

Далее для каждого года были определены коэффициенты уравнения (1), их значимость, значимость уравнения в целом и значения коэффициента R^2 , динамика которого представлена на рис. 4.

Анализ статистической значимости коэффициентов уравнения (1) по t -критерию Стьюдента показал, что:

- в промежутке с 1995 по 2002 год статистически не значим коэффициент a_L ;
- в промежутке с 2008 по 2008 год и в 2010 году статистически не значимы коэффициенты a_0 и a_N .

Это может означать, что в соответствующие периоды регрессоры L и N не оказывали существенного влияния на объем инвестиций в основной капитал либо в модели возникал эффект мультиколлинеарности. Оба предположения требуют дополнительного исследования модели (1) методами анализа панельных данных на наличие временных эффектов.

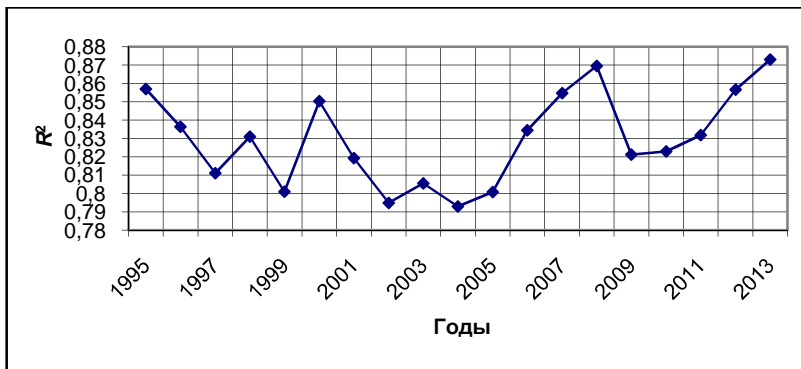


Рис. 4. Динамика величины R^2 уравнения (1)

4. Перспективы дальнейшего исследования. Проведенное исследование показало, что построенная регрессионная модель инвестиций (1) требует дополнительного исследования методом панельных данных на наличие временных эффектов. Кроме того, следует учесть инфляционные процессы и неравномерность распределения зарегистрированных предприятий на территории России.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлова Л.Н. Проблемы оценки инвестиционной привлекательности экономических субъектов на различных уровнях хозяйствования [Электронный ресурс] // Наукоеведение: Интернет-журнал. 2014. № 4 (23). Идентификационный номер статьи 106EVN414. Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/106EVN414.pdf> (дата обращения 20.09.2016 г.).
2. Национальный рейтинг состояния инвестиционного климата в субъектах РФ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://asi.ru/investclimate/rating/> (дата обращения 20.10.2015 г.).
3. Исследование инвестиционного климата регионов России [Электронный ресурс] / Рейтинговое агентство «Эксперт РА». Режим доступа: <http://raexpert.ru/researches/regions/investclimate/> (дата обращения 20.10.2015 г.).
4. Регионы России. Социально-экономические показатели [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. Режим доступа: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156 (дата обращения 20.04.2016 г.).
5. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева [и др.]; под. ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2007. 576 с.

УДК 778.241

В. Л. Зудин, А. Г. Маланов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: zudinvl@ystu.ru

К ВЫБОРУ ПРОЕКТОРА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ КАЧЕСТВЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПОЛУЗАТЕМНЕННЫХ УЧЕБНЫХ ПОМЕЩЕНИЯХ

В статье рассматривается возможность аналитического подхода к выбору проектора с учетом установленных ограничений на освещенность посторонней засветки экрана и контрастность изображения в условиях полузатемненного учебного помещения.

Ключевые слова: световой поток проектора, освещенность экрана, контрастность проектора и изображения, выбор проектора.

V. L. Zudin, A. G. Malanov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zudinvl@ystu.ru

THE CHOICE OF THE PROJECTOR FOR RECEIVING QUALITY IMAGES IN A SEMI-DARKENED CLASSROOMS

The article discusses the ability of analytical approach to the choice of the projector subject to the restrictions on the illumination of outside exposure of the screen and image contrast in terms of the semi-darkened classrooms.

Keywords: the luminous flux of the projector, the screen illumination, the contrast of the projector and the image area of the image, the choice of the projector.

Одной из важнейших задач, которую приходится решать при выборе проектора для установки в учебном помещении (например, лекционной аудитории), является определение требуемого для данных условий светового потока $F_{пр}$ проектора.

Выбор проектора с излишне большим световым потоком обеспечивает высокую яркость и качество изображения, меньшую "чувствительность" к изменению внешней освещенности, не требует затемнения аудитории, однако не всегда целесообразен в экономическом отношении, приводит к увеличению массы и габаритов прибора, увеличивает затраты электроэнергии в процессе эксплуатации, создает излишний шум за счет работы вентиляторов.

При выборе проектора с недостаточным световым потоком ситуация меняется кардинально: уменьшаются эксплуатационные расходы, габариты и масса, но зато резко возрастает влияние внешних источников света на качество демонстрируемого изображения, уменьшается яркость изображения и ухудшается его контрастность, что затрудняет эффективное восприятие демонстрируемого видеоматериала, а иногда даже делает его невозможным.

Задача выбора проектора технически легко решается для полностью затемненных помещений аудиторного типа при обеспечении номинальной освещенности экрана 300-500 лк [1] и известной площади S изображения: $F_{\text{пр}} = (300 \dots 500) S$ (лм). Однако в реальных условиях учебной работы полное затемнение аудитории, как правило, недопустимо, поскольку учащиеся, помимо просмотра видеоинформации, должны вести и записи необходимого материала. Таким образом, априори предполагается наличие дополнительных источников света (электрического, естественного или комбинированного освещения), чтобы обеспечить достаточно комфортные условия для ведения записей.

При общем искусственном освещении часть световой энергии, рассеиваясь в помещении, неизбежно будет направляться и к экрану, тем самым уменьшая контрастность изображения. Поэтому при небольшом световом потоке проектора влияние на экран посторонней засветки может оказаться весьма существенным. Частично этот эффект может быть уменьшен за счет установки дополнительных экранирующих поверхностей, в некоторой мере (но далеко не полностью) ограничивающих проникновение "ненужного" света к экрану (так называемая посторонняя или паразитная засветка).

Таким образом, задача оптимального выбора проектора для учебной аудитории требует компромиссного подхода между двумя рассмотренными выше возможностями. В статье рассматривается возможность аналитического решения этой задачи путем выявления воздействия перечисленных выше факторов, определяющих выбор проектора с требуемым значением его светового потока, с учетом установленных ограничений на освещенность посторонней засветки экрана и контрастность изображения в условиях полузатемненного помещения.

Полученные в работе [2] соотношения для определения контрастности K изображения могут быть использованы в качестве основы для вычисления требуемого светового потока с учетом условий демонстрации (в частности, при наличии посторонних засветок с освещенностью $E_{\text{засв}}$).

В силу своих аддитивных свойств полная освещенность $E_{\text{полн}}$ экрана складывается из двух составляющих - освещенности $E_{\text{пр}}$, обеспечиваемой проектором, и освещенности $E_{\text{засв}}$, возникающей за счет воздействия посторонней засветки. Таким образом, $E_{\text{полн}} = E_{\text{пр}} + E_{\text{засв}}$.

Величины $E_{\text{пр}}$ и $E_{\text{засв}}$ могут быть получены из приведенных в той же работе формул:

$$E_{\text{пр}} = E_{\text{засв}} \left(\frac{1}{C} - 1 \right), \quad E_{\text{засв}} = E_{\text{пр}} \left(\frac{C}{1-C} \right), \quad K = \frac{1}{C} = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{засв}}} + 1.$$

Значение K здесь определяется числителем в общепринятой дробной записи контрастности $K:1$ (например, 500:1); параметр C - доля засветки экрана по отношению к его полной освещенности.

Отсюда следует

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{пр}} + E_{\text{засв}} = E_{\text{засв}} \left(\frac{1}{C} - 1 \right) + E_{\text{засв}}$$

и

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{пр}} + E_{\text{засв}} = E_{\text{пр}} + E_{\text{пр}} \left(\frac{C}{1-C} \right).$$

С учетом приведенного выше равенства ($K = 1/C$) две последние формулы приобретают вид

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{засв}} \cdot K; \quad E_{\text{полн}} = E_{\text{пр}} \left(\frac{1}{1-1/K} \right).$$

Поскольку оба выражения определяют одну и ту же величину $E_{\text{полн}}$, можно приравнять их друг к другу. Тогда

$$E_{\text{засв}} \cdot K = E_{\text{пр}} \left(\frac{K}{K-1} \right).$$

Выделяя из полученного соотношения величину $E_{\text{пр}}$, получим

$$E_{\text{пр}} = E_{\text{засв}} \cdot (K - 1).$$

Величина $E_{\text{пр}}$ есть составляющая полной освещенности, определяемая только проектором, поэтому, учитывая, что $E_{\text{пр}} = F_{\text{пр}}/S$ (где $F_{\text{пр}}$ - световой поток проектора; S - площадь изображения на экране), можно записать для соотношения $F_{\text{пр}}/S$:

$$\frac{F_{\text{пр}}}{S} = E_{\text{засв}} (K - 1). \quad (1)$$

Значения $F_{\text{пр}}$ и S определяются для условий применения в конкретном помещении, поэтому целесообразно вычислять именно их отношение (т.е. освещенность $E_{\text{пр}}$, получаемую на экране за счет светового потока проектора), а не отдельные значения $F_{\text{пр}}$ и S . Кроме того, такая форма записи позволяет табулировать результаты расчета независимо от абсолютных значений указанных параметров.

Диаграмма для расчета любого из указанных в формуле (1) параметров ($F_{\text{пр}}/S$, $E_{\text{засв}}$, K) по двум известным приведена на рис. 1.

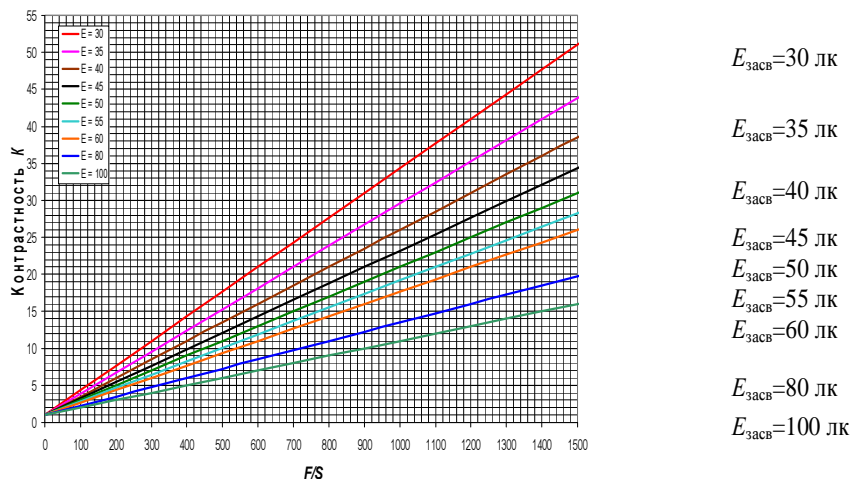


Рис. 1. Диаграмма для определения параметров уравнения (1)

Использование диаграммы позволяет наглядно представить связи, существующие между параметрами, избавиться от возможных арифметических ошибок при расчете и, что немаловажно, увидеть, как нужно изменить параметры системы, чтобы улучшить ее характеристики.

Полученное соотношение (1) позволяет связать три важнейших параметра ($F_{\text{пр}}/S$, $E_{\text{засв}}$ и K) в единую систему отношений, причем два из этих параметров ($E_{\text{засв}}$ и K) имеют определенные ограничения по своим значениям.

В учебном процессе наиболее важной в содержательном отношении является, как правило, текстовая (символьная) информация. Кроме того, текст содержит элементы (символы), которые чаще всего являются самыми мелкими из компонентов демонстрируемого фрагмента (кадра). Исследования влияния контрастности знаков на читаемость символов [3] показали, что минимальная её величина для обеспечения достаточно комфортных условий наблюдения составляет от 10:1 до 18:1. Например, при разработке устройств отображения информации считается общепринятым и достаточным значение контрастности 10:1. Для условий учебного процесса то же значение может быть принято в качестве минимально допустимого, т.е. $K_{\text{мин}} = 10$.

В отношении уровня посторонней засветки также существует ограничение, связанное как с техническими причинами, так и с возможностями восприятия изображения человеком.

Технические причины заключаются в том, что уровень посторонней засветки не удается снизить менее 1-1,5% от освещенности экрана, что приводит к заметному снижению контрастности в темных участках изображения [4]. Это связано с наличием неизбежных факторов – рассеянием световых лучей в проекционном объективе, наличием частиц пыли в помещении, отражением света от изображения на экране в сторону помещения, а от предметов и зрителей в нём – вновь к экрану (самозасветка экрана).

Если при демонстрации изображения не используется искусственное освещение, то уровень посторонней засветки $E_{засв}$ должен составлять не менее 30-50 лк, поскольку в противном случае учащимся будет сложно (и даже практически невозможно) конспектировать учебный материал в тетрадях. При этом примерно такой же уровень засветки будет и на поверхности проекционного экрана. Поэтому значение $E_{засв} = 30$ лк может быть использовано в качестве минимального расчетного значения в полученном выше соотношении $F_{пр}/S = f(E_{засв}, K)$. Для ориентировочного расчета отношения $F_{пр}/S$ можно использовать именно этот вариант.

С другой стороны, чем ниже посторонняя засветка экрана, тем выше контрастность (т.е. качество) изображения. Разрешение этого противоречия может состоять в размещении дополнительных источников света, направляемых на рабочие столы учащихся. При этом необходимо предпринять указанные ранее меры для того, чтобы свет от этих источников в минимальной степени попадал на экран и воздействовал на него как источник посторонней засветки.

Таким образом, освещенность $E_{засв}$ экрана в результате действия посторонних засветок должна быть каким-то образом определена - либо задана заранее ($E_{засв} = 30$ лк), либо экспериментально измерена в конкретном помещении (аудитории) с помощью люксметра. В обоих случаях полученное значение $E_{засв}$ подставляется в формулу (1).

Учитывая, что величина K должна составлять не менее 10, с максимальной 10%-ной погрешностью формула может быть заменена более простой:

$$\frac{F_{пр}}{S} = E_{засв}K. \quad (2)$$

Следует отметить, что расчет по формуле (2) дает несколько завышенное значение величины $F_{пр}/S$, что приводит и к некритичному завышению величины светового потока $F_{пр}$ при выборе проектора. График изменения погрешностей расчета $F_{пр}/S$, построенный для $E_{засв} = 30$ лк и значениях K , изменяющихся от 10 до 130, приведен на рис. 2.

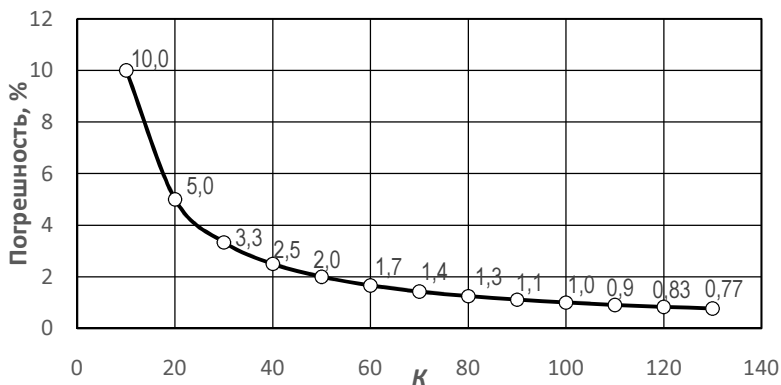


Рис. 2. Изменение погрешности с ростом контрастности

Приобретение проектора со световым потоком, превышающим расчетный, позволяет увеличить либо контрастность K (при постоянном уровне засветки), либо уровень засветки $E_{засв}$ (при неизменной контрастности), либо оба параметра одновременно. При этом важно, чтобы стоимость проектора не вступила в противоречие с отрицательными качествами такого приобретения, указанными ранее.

Таким образом, после определения контрастности и уровня засветки проекционного экрана задача вычисления требуемого светового потока $F_{пр}$ сводится исключительно к определению площади изображения, обеспечивающей световым потоком выбранного проектора. Этот вопрос не столь прост, как кажется с первого взгляда, поэтому ему будет посвящена отдельная публикация.

Для сопоставления получаемых результатов с нормативными требованиями и результатами других исследований целесообразно выразить расчетные значения освещенности экрана ($E = F/S$) через аддитивную величину - яркость $B_{полн}$ экрана и ее составляющих ($B_{пр}$ и $B_{засв}$). С этой целью можно воспользоваться известной формулой

$$B = \frac{E \cdot r}{\pi} = \frac{r}{\pi} \cdot \frac{F}{S},$$

где r – коэффициент отражения экрана.

Пусть, например, $E_{пр} = 500$ лк, $E_{засв} = 25$ лк и $E_{полн} = E_{пр} + E_{засв} = 525$ лк. Примем значение коэффициента яркости экрана равным 0,8. Тогда яркости соответствующих компонентов для полученных значений освещенности составят:

$$B_{пр} = 500 \cdot 0,8 / \pi = 127,3 \text{ кд/м}^2, \quad B_{засв} = 25 \cdot 0,8 / \pi = 6,4 \text{ кд/м}^2,$$

$$B_{полн} = B_{пр} + B_{засв} = 133,7 \text{ кд/м}^2.$$

Как видно, суммарная яркость экрана значительно выше нормативных величин (от 30 до 65 кд/м² при рекомендуемом номинальном значении 40 кд/м² [5]). Это превышение объясняется необходимостью повышения мощности проектора (а следовательно, яркости и светового потока) в связи с высоким уровнем засветки (в примере: $E_{засв} = 25$ лк или 4,76% от суммарной освещенности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санитарные правила и нормы СанПиН 2.2.1/2.1.1.1278-03 "Гигиенические требования к естественному, искусственному и совмещенному освещению жилых и общественных зданий".
2. *Зудин В.Л.* Расчет контрастности изображения на экране при наличии посторонней засветки // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 114-121.
3. *Салвенди Г.* Человеческий фактор. Т. 5. М.: Мир, 1992. 390 с.
4. *Кулагин С.В.* Проектирование фото- и киноприборов. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
5. *Долин П.А.* Справочник по технике безопасности. М.: Энергоатомиздат, 1985. 824 с.

УДК 535.8

П. А. Иванов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ivanovpa@ystu.ru

МЕТОДЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА БАЗЕ КОГЕРЕНТНЫХ ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЦЕССОРОВ

Приводятся результаты моделирования на ПЭВМ распознавания двумерных полутонных изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям, с помощью составных фильтров.

Ключевые слова: инвариантные корреляционные фильтры, корреляционная функция, преобразование Фурье, распознавание изображений.

P. A. Ivanov

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: ivanovpa@ystu.ru

METHODS OF CORRELATION IMAGE RECOGNITION BASED ON COHERENT OPTOELECTRONIC PROCESSORS

The results of PC modeling of 2D grayscale images with geometrical deformations recognition with the usage of invariant correlation filters are given.

Keywords: *invariant correlation filters, correlation function, Fourier transform, image recognition.*

Важной задачей оптической обработки информации является задача распознавания изображений. Привлекательным подходом к решению задачи распознавания изображений, полученных при аэрофотосъемке местности или объектов, находящихся в состоянии движения, является применение возможностей оптоэлектроники. Одним из наиболее широко используемых в настоящее время схемотехнических решений таких задач, ввиду хорошей технологической разработанности соответствующей элементной базы, широкой доступности высокочувствительных фотоприемных устройств, средств пост- и предобработки, является оптико-электронный коррелятор изображений. В зависимости от типа системы, коррелятор может быть оптико-электронный (когерентный или некогерентный), цифровой (спецпроцессор) или гибридный – сочетающий цифровые и оптические методы. Среди схем оптико-электронных корреляторов широкое распространение получили схемы 4f-коррелятора (схема Ван-дер-Люгта), коррелятор совместного преобразования изображений, акустооптические корреляторы, а также многочисленные модификации указанных решений [1]. Основной функцией данного устройства является вычисление корреляционной функции входных данных с эталонным объектом. К сожалению, выбор в качестве эталона оригинала распознаваемого изображения является крайне неудачным. При корреляционном распознавании изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям (а в естественных условиях, например, при аэрофотосъемке, таковые есть всегда), выходной корреляционный пик резко деградирует при самых малейших изменениях геометрии распознаваемого объекта (за исключением преобразования сдвига, т.к. корреляционная функция обладает автоматической инвариантностью к этому типу преобразований). Довольно привлекательным и популярным вариантом выбора эталона является применение составного инвариантного корреляционного фильтра [2].

В данной работе в качестве объекта исследования использовались инвариантные корреляционные фильтры (КФ) следующих типов: МСЭК (с минимальной средней энергией корреляции), ГМСЭК (с минимальной средней энергией корреляции и со сглаживающей функцией Гаусса), MINACE (с минимальной средней энергией корреляции и шумоподавлением), DCCF (корреляционный фильтр с контролем межклассового расстояния), полиномиальные фильтры. Были проведены эксперименты по компьютерному моделированию распознавания изображений, подвергну-

тых геометрическим преобразованиям поворота и изменению масштаба, а также межклассовому распознаванию изображений. В качестве среды моделирования был выбран пакет Matlab Mathworks, как наиболее подходящий для подобного рода задач. Для каждого случая вычислялись значения корреляционных функций

$$C(x_c, y_c) = \iint_{\substack{-\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty}} f_{эм}^*(x, y) f_{вх}(x - x_c, y - y_c) dx dy, \quad (1)$$

нормированных на величину максимального пика (количественные характеристики корреляции). Здесь * – обозначает комплексное сопряжение; $f_{эм}$ и $f_{вх}$ – эталонное (фильтр) и входное изображения соответственно.

Аналитические виды эталонных объектов (инвариантных корреляционных фильтров) для соответствующих типов:

1) МСЭК-фильтр:

$$h = D^{-1} X (X^+ D^{-1} X)^{-1} u, \quad (2)$$

где X – вектор, представляющий собой преобразование Фурье исходного изображения;

D – диагональная матрица с элементами главной диагонали, равными квадрату амплитуды компонент преобразования Фурье вектора X ;

U – вектор распознаваемого объекта, равный 1 для “истинного” и 0 для “ложного” изображений;

“+” – обозначает операцию транспонирования матрицы.

2) ГМСЭК-фильтр:

$$H = D^{-1} X (X^+ D^{-1} X)^{-1} + D^{-1} A F - D^{-1} X (X^+ D^{-1} X)^{-1} X^+ D^{-1} A F, \quad (3)$$

где F – вектор, элементы которого являются преобразованиями Фурье функции Гаусса; A – диагональная матрица, элементы которой равны сумме компонент преобразований Фурье исходных изображений; D и X – аналогично случаю с МСЭК-фильтрами.

3) DCCF-фильтр:

$$J(h) = \frac{A(h)}{B(h)}, A(h) = h^+ S_A h, B(h) = h^+ S_B h, \quad (3)$$

$$S_A = \frac{1}{d} \sum_{c=1}^C (\bar{x}_c - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_c - \bar{x})^+, S_B = \frac{1}{d} \sum_{c=1}^C \sum_{i=1}^N (X_{ic} - \bar{X}_c) \cdot (X_{ic} - \bar{X}_c)^+,$$

где X_c – изображение соответствующего класса; C – число классов; X_{ic} – диагональная матрица, состоит из 2D преобразований Фурье изображения с номером i класса c ; d – варьируемый параметр.

4) Полиномиальные фильтры:

$$H = S^{-1} X, \quad (4)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}, \quad S_{pq} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i^p - \bar{X}_i^p) \cdot (X_i^q - \bar{X}_i^q)^*,$$

где p и q – соответствующие степени.

Распознавание изображений, подвергнутых преобразованию поворота. В качестве исходных изображений использовалась база данных объекта типа “самолет”, подвергнутых преобразованию поворота в плоскости на углы от 0 до 355° с шагом 5, 10 и 15°, всего соответственно 72, 36 и 24 изображения. На основе указанной базы были синтезированы МАСЕ-фильтры (для каждого случая отдельно), после чего вычислялись корреляции (корреляционные функции) всех 72-х объектов из этой же базы данных с построенными фильтрами. Типичное исходное и распознаваемое изображение представлено на рис. 1. Вычислялись величины пиков корреляции, нормированные на максимальное значение (количественные характеристики пика), а также величины отношений значения пика корреляции к отклонению от среднего (по фону корреляционной картины) и значения пика корреляции к среднеквадратическому отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), которые обозначены как PSR_SD и PSR_AV соответственно (качественные характеристики пика). Изображение считалось распознанным по значению порога, который принимался равным 0,5 от максимальной величины пика корреляции, как это принято, например, в [3].

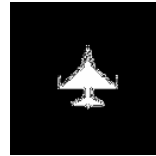


Рис. 1. Изображение распознаваемого объекта

Распознавание изображений, подвергнутых преобразованию изменения масштаба. В качестве исходных изображений использовалась база данных тех же объектов типа “самолет” (см. рис. 1), подвергнутых преобразованию изменения масштаба в диапазоне от -100% до +100% от первоначального с шагом 5, 10 и 15%, всего соответственно 21, 11 и 7 изображений (отдельно для увеличения и уменьшения масштаба). На основе указанной базы были также синтезированы фильтры (для каждого случая отдельно), после чего вычислялись корреляции (корреляционные функции) всех имеющихся в базе 41-го объекта с построенными фильтрами. Были вычислены те же характеристики пика, что и в случае с преобразованием поворота.

Межклассовое распознавание изображений. В качестве исходных изображений использовалась база данных, содержащих 72 “истинных” объекта типа “самолет” (т.е. подлежащих распознаванию, см. рис. 1) и 72 “ложных” объекта того же типа (т.е. подлежащих отклонению, рис. 2), подвергнутых преобразованию поворота в плоскости на углы от 0 до 355° с шагом 5°, всего 144 изображения.

Рис. 2. Изображение “ложного” объекта



На основе указанной базы были синтезированы фильтры (отдельно для случая всех 144 объектов, отдельно только для 72-х “истинных” объектов), после чего вычислялись корреляционные функции всей базы из 144 объектов (“истинных” и “ложных”) с фильтрами. Вычислялись те же параметры корреляционного пика, что и в 2-х предыдущих случаях (для поворота и изменения масштаба). Коэффициенты PSR_SD и PSR_AV вычислялись раздельно для “истинных” и “ложных” изображений, критерием ошибки считались ситуации, когда значения нормированных на соответствующий максимум величин корреляции для “ложных” изображений превышали те же значения для “истинных”.

Характерные зависимости нормированных значений корреляционных пиков от параметра деформации приведены на рис. 3.

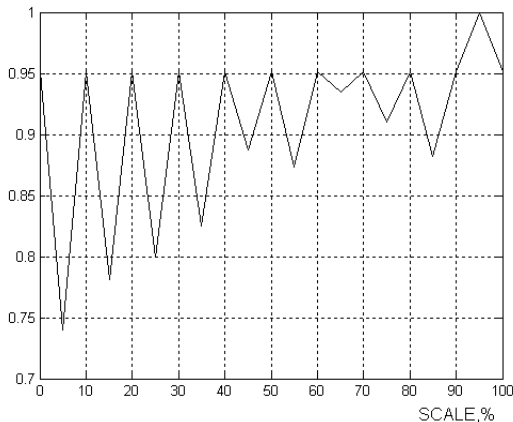


Рис. 3. Зависимость нормированной величины пика корреляции от величины изменения масштаба (уменьшение, %) входного объекта, шаг изменения масштаба -10%, разрешение 64x64

Обсуждение результатов моделирования. Имеют место удовлетворительные результаты по количеству ошибок для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию поворота, при шаге угла поворота до 10° (т.е. разница в углах поворота изображений, участвовавших в генерации фильтра и предъявленных к распознаванию до 5°). При увеличении шага количество нераспознанных изображений резко возрастает, вплоть до практически всех изображений, не входивших в число участвовавших в генерации фильтра, но предъявленных к распознаванию при шаге, превышающем 10° . С учетом вышеуказанного, результаты моделирования показывают, что следует крайне осторожно использовать КФ для этого типа геометрических преобразований (поворот в плоскости). Улучшение характеристик корреляционного пика наблюдается в случае использования полиномиальных фильтров, однако следует отметить, что данные КФ требуют очень серьезных вычислительных ресурсов при генерации.

Очень хорошие результаты получены для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию изменения масштаба, прежде всего, в сторону уменьшения. Имеют место очень высокие качественные характеристики пика, даже при низком разрешении, при минимальном количестве ошибок. С учетом того факта, что свертка/корреляция автоматически обладает инвариантностью к сдвигу распознаваемого объекта, результаты моделирования позволяют надеяться на успешное применение КФ для подобного класса задач.

Результаты моделирования для межклассового распознавания изображений можно признать удовлетворительными. Следует учитывать, что в проведенном моделировании относительно распознавания “истинных” и “ложных” объектов решалось, фактически, одновременно 2 задачи – помимо собственно межклассового распознавания одновременно проводилось распознавание изображений обоих классов, подвергнутых преобразованию поворота в плоскости. Распознавание проводилось в 2 этапа - сначала для разделения классов применялись DCCF-фильтры, после разделения - фильтры МСЭК, ГМСЭК и MINACE. Наилучшие результаты получены для случая последовательного использования DCCF- и MINACE-фильтров.

Выводы.

1. Проведен синтез на ПЭВМ инвариантных корреляционных фильтров и приводятся результаты применения этого типа КФ для задач распознавания 2D-изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям поворота, изменения масштаба, а также межклассовому распознаванию таких объектов.

2. Результаты моделирования показывают возможность успешного применения КФ для задач распознавания изображений, подвергнутых пре-

образованию изменения масштаба, а также межклассовому распознаванию объектов, подвергнутых этому типу преобразования, прежде всего, за счет применения DCCF-фильтров.

3. Получены удовлетворительные результаты моделирования для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию поворота распознаваемого объекта в плоскости, за счет применения полиномиальных фильтров

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационная оптика / Н.Н. Евтихийев, О.А. Евтихьева, И.Н. Компанец, А.Е. Краснов, Ю.Н. Кульчин, С.Б. Одинокоев, Б.С. Ринкевичос. М.: Изд-во МЭИ, 2000.
2. Kumar Vijaya B. V. K. Tutorial survey of composite filter design for optical correlators // Appl. Opt. 1992. **31**. P. 4773-4801,
3. Ivanov P.A. Comparison of correlation peaks characteristics for scaled images recognition using MACE, GMACE and MINACE filters // Proc. SPIE. 2013. Vol. 8748. P. 8748ON1-8748ON-6,
4. Experiments on realization of wavelet transform based on architecture of hybrid optoelectronic chip / N.N. Evtikhiev, P.A. Ivanov, A.V. Kamensky, R.S. Starikov, M.I. Zabulonov // Optical memory & neural network. 2002. Vol. 11, No.1. P. 39-43.
5. Ivanov P.A. Modeling of scaled and rotated images recognition using different variants of invariant correlation filters // Proceedings of SPIE. 2016. V. 9845. 9845OT1-9845OT6.
6. Иванов П.А. Инвариантные корреляционные фильтры в задачах различения геометрически искаженных изображений // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 122-129.

УДК 517.95

И. Ю. Клочкова

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: s.tamonov@rsu.edu.ru, i-usacheva@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПАРАШЮТИСТА В ПЛОСКОСТИ И В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается прыжок парашютиста с момента отделения от самолета. На основе экспериментальных данных определяется математическая модель, описывающая траекторию движения парашютиста. Разработана технология восстановления траектории движения по заданным параметрам. Приведен конкретный пример.

Ключевые слова: математическая модель движения парашютиста, траектория прыжка парашютиста.

I. U. Klochkova

RSU named after S.A. Esenina

Russia, Ryazan, e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru, i-usacheva@mail.ru

MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF THE PARACHUTIST IN THE PLANE AND IN THREE- DIMENSIONAL SPACE

We consider the skydiving of the parachutist since he leaves the aircraft. On the basis of experimental data a mathematical model is determined; it describes the motion trajectory of the parachutist. The technology of recovery trajectory on the set parameters is obtained. The concrete example is given.

Keywords: a mathematical model of the motion load, free falls of load.

После отделения тела от горизонтально летящего самолета тело по инерции движется в направлении полета самолета, а под действием силы тяжести падает вниз. В результате тело движется по кривой, постепенно отклоняясь от горизонтального движения и приближаясь к вертикальному (рис. 1). При этом можно наблюдать четыре этапа прыжка парашютиста: 1) свободное падение парашютиста, 2) снижение на стабилизирующем парашюте, 3) наполнение купола основного парашюта, 4) снижение на раскрытом парашюте.

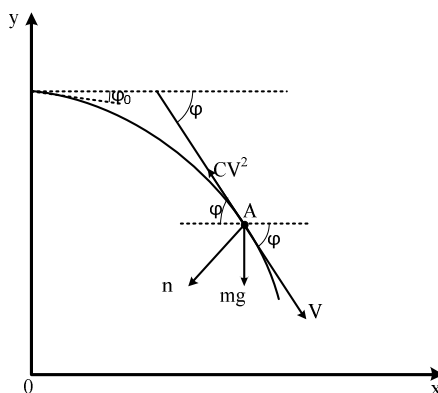


Рис. 1. Схема сил, действующих на падающее тело

В первые секунды падения тела горизонтальная составляющая скорости $\dot{x}(t) = V_x$, вследствие значительного сопротивления воздуха движущемуся телу, будет заметно уменьшаться, а вертикальная составляющая $\dot{y}(t) = V_y$ из-за малого времени падения увеличивается незначительно, поэтому результирующая скорость $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ будет в первые секунды падения уменьшаться. При дальнейшем падении тела скорость V будет увеличиваться [1].

Математическая модель плоского движения парашютиста описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dV^2}{ds} &= 2g \cdot \sin \varphi - 2aV^2, \\ V^2 \frac{d(\sin \varphi)}{ds} &= g \cdot \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения, $2aV^2$ – сила сопротивления, φ – угол, образованный касательной к траектории тяжелой точки и осью Ox (см. рис. 1) [1, 2].

Для системы дифференциальных уравнений (1) ставится задача определения координат плоского движения груза $x(t)$, $y(t)$ в заданный момент времени t .

В результате преобразований системы дифференциальных уравнений (1), полагая $k = \rho \cdot \frac{cf}{2}$, получим

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = V \sin \varphi, \\ \frac{dV}{dt} = g \sin \varphi - \frac{k}{m} V^2, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g \cos \varphi}{V}, \end{cases} \quad (2)$$

где ρ – плотность воздуха; c – коэффициент лобового сопротивления; f – мидель тела.

Относительно функций V, φ, y система (2) интегрируется при следующих начальных условиях: $V(0) = V_0$, $\varphi(0) = 0$, $y(0) = 0$, где V_0 – скорость самолета [3].

Пример. Парашютист совершил прыжок с горизонтально летящего самолета со скоростью $V_0 = 40$ м/с с высоты $h = 600$ м. Суммарная масса парашютиста с парашютом Д-6 $m = 90$ кг. Плотность воздуха на данной

высоте $\rho = 1,25 \text{ кг/м}^3$. Также известно, что мидель парашюта $F_n = 80 \text{ м}^2$, коэффициент сопротивления парашюта Д-6 $C_n = 0,9$. Ускорение свободного падения для упрощения расчетов примем равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Рост парашютиста $l = 1,7 \text{ м}$.

1 этап. На данном этапе коэффициент пропорциональности $k_1 = 0,27$, время $t_0 = 0 \text{ с}$, составляющие вектора скорости $V_x(t_0) = 0$, $V_y(t_0) = 40 \text{ м/с}$, угол наклона траектории $\varphi_1 = 0^\circ$. Используя расчетные формулы первого этапа, получаем:

- составляющие скорости: $V_x(t) = 40 - 4,8 t$, $V_y(t) = 10t$;
- законы изменения координат: $x(t) = 40t - 2,4t^2$; $y(t) = 5t^2$;
- время окончания первого этапа $t_1 \approx 0,55 \text{ с}$.

В конце первого этапа будем иметь: $V_x(t_1) = 37,36 \text{ м/с}$, $V_y(t_1) = 5,5 \text{ м/с}$, $V(t_1) = 37,76 \text{ м/с}$, $\varphi_2 = 8^\circ$, $x(t_1) = 21,27 \text{ м}$, $y(t_1) = 1,5 \text{ м}$.

2 этап. На втором этапе значение коэффициента k определяется конструкцией стабилизирующего парашюта и будет равен $k_2 = 2k_1 = 0,54$. Используя расчетные формулы данного этапа, получим:

- составляющие скорости: $V_x(t) = 41,87 - 8,37t$; $V_y(t) = 4,6 + 1,63t$;
- законы изменения координат:

$$x(t) = 21,27 + 37,36(t - 0,55) - 4,185(t - 0,55)^2;$$

$$y(t) = 1,5 + 5,5(t - 0,55) + 0,815(t - 0,55)^2;$$

- время окончания второго этапа $t_2 = t_1 + 3 \text{ с} = 3,55 \text{ с}$, так как снижение на стабилизирующем парашюте происходит примерно в течение 3 с. Тогда в конце второго этапа определяем:

$$V_x(t_2) = 12,16 \text{ м/с}, V_y(t_2) = 10,39 \text{ м/с}, V(t_2) = 16 \text{ м/с}, \varphi_3 = 40,5^\circ,$$

$$x(t_2) = 96 \text{ м}, y(t_2) = 25 \text{ м}.$$

3 этап. В процессе наполнения купола парашюта значение коэффициента $k_3 = k_1 = 0,27$. Используя расчетные формулы этого этапа, получаем:

- составляющие скорости: $V_x(t) = 14,25 - 0,59t$; $V_y(t) = -23,02 + 9,41t$;
- законы изменения координат:

$$x(t) = 96 + 12,16(t - 3,55) - 0,295(t - 3,55)^2,$$

$$y(t) = 255 + 10,39(t - 3,55) + 4,71(t - 3,55)^2;$$

- время окончания третьего этапа находим из условия $y(t_3) - y(t_2) = 13 \text{ м}$. Получаем, что $t_3 \approx 4,44 \text{ с}$.

В конце третьего этапа определяем:

$$V_x(t_3) = 11,63 \text{ м/с}, V_y(t_3) = 18,76 \text{ м/с}, V(t_3) = 22 \text{ м/с}, \varphi_4 = 58^\circ,$$

$$x(t_3) = 107 \text{ м}, y(t_3) = 38 \text{ м}.$$

4 этап (снижение на раскрытом парашюте). Значение коэффициента $k_4 = 45$. Используя расчетные формулы четвертого этапа, получаем:

- предельная скорость снижения $V_{CH} = 4,47 \text{ м/с}$;
- время окончания четвертого этапа (момент приземления) $t_3 \approx 120 \text{ с}$.

В конце четвертого этапа получаем:

снос парашюта $x(t_4) \approx 1500 \text{ м} = 1,5 \text{ км}$, $V_x(t_4) = 11,63 \text{ м/с}$,

$V_y(t_4) = 4,45 \text{ м/с}$, $V(t_4) = 12,45 \text{ м/с}$.

Недостатком данного метода является получение траектории прыжка парашютиста в плоскости.

На данный момент не существует универсальных методов получения траектории прыжка в пространстве. Для решения этой задачи необходимо рассмотреть экспериментальные данные нескольких прыжков и выявить закономерность. Рассмотрим возможный метод расчета траектории прыжка, а также получения координат приземления. Для этого экспериментальные данные прыжка формируются в массив, отображающий зависимость координат от времени (начальные данные указаны выше). Далее, с помощью методов численного дифференцирования пакета прикладных программ Maple, определена скорость изменения пространственных координат [4]. Построены линейные зависимости скоростей от пространственных координат с использованием регрессионного анализа, полученные линейные зависимости определяют систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -7,85 - 0,031 \cdot x(t) + 0,008 \cdot y(t) + 0,02 \cdot z(t), \\ \dot{y}(t) = 9,792 + 0,323 \cdot x(t) - 0,04 \cdot y(t) + 0,02 \cdot z(t), \\ \dot{z}(t) = 22,98 + 0,013 \cdot x(t) - 0,018 \cdot y(t) - 0,04 \cdot z(t). \end{cases}$$

Построенная система (3) позволяет определить теоретическую траекторию движения парашютиста (рис. 2). Все вычислительные операции производятся с помощью пакетов прикладных программ Maple.

В результате сравнения теоретической и фактической зависимостей изменения координат получили, что точка приземления, определяемая по теоретической зависимости, находится на расстоянии 60 м от фактического приземления.

Также построены нелинейные зависимости скоростей от пространственных координат с использованием регрессионного анализа, полученные нелинейные зависимости определяют систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0,009 \cdot x^2(t) + 0,0023 \cdot x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -2459,8 - 12,75 \cdot x(t) + 4,77 \cdot y(t) + 7,89 \cdot z(t) - 0,002 \cdot y^2(t) - \\ \quad - 0,007 \cdot z^2(t) + 0,01 \cdot x(t)z(t) - 0,007 \cdot y(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = -2,91 \cdot x(t) + 0,023 \cdot x^2(t) - 0,04 \cdot x(t)y(t) + 0,006 \cdot x(t)z(t). \end{cases} \quad (4)$$

Построенная система (4) позволяет определить теоретическую траекторию движения парашютиста (рис. 3).

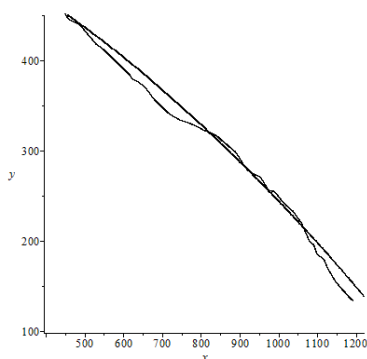


Рис. 2. Теоретическая, для линейной системы ДУ, и фактическая траектории, построенные в плоскости Oyz

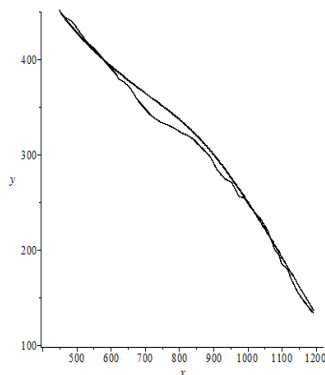


Рис. 3. Теоретическая, для нелинейной системы ДУ, и фактическая траектории, построенные в плоскости Oyz

В результате сравнения теоретической и фактической зависимостей изменения координат, получили, что точка приземления, определяемая по теоретической зависимости, находится на расстоянии 2 м от фактической [5].

Дальнейшие исследования позволят получить систему дифференциальных уравнений, описывающую математическую модель прыжка парашютиста, учитывающую управление, в пространстве, что позволит получить конкретные данные прыжка, а также эллипс точек приземления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лялин В.В.* Парашютные системы / В.В. Лялин, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев. М.: Физматлит, 2009. 506 с.
2. *Лобанов Н.А.* Основы расчета и конструирования парашютов. М.: Машиностроение, 1965. 365 с.
3. *Усачев Ю.В.* Математическая модель движения парашютиста / Ю.В. Усачев, В.Н. Курашин // Вестник РГУ им. С. А. Есенина. 2010. № 1 (26). С. 108-115.
4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1972. 512 с.
5. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Спб.: Лань, 2010. 704 с.

УДК 621.891: 621.026

Л. В. Королев, Д. О. Бытев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevly@mail.ru

СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ В МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Для описания случайного транспорта частиц в среде с ловушками предложено кинетическое уравнение типа Колмогорова – Феллера, содержащее дополнительную переменную – собственное время частицы.

Ключевые слова: блуждания с непрерывным временем, кинетические уравнения, процессы с памятью.

L. V. Korolev, D. O. Bytev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: korolevly@mail.ru

INTRINSIC TIME IN A RANDOM PROCESS MODEL

A Kolmogorov – Feller type kinetic equation is proposed to describe random transport process of particles in medium with traps. The equation contains an extra variable named intrinsic time of a particle.

Keywords: CTRW, kinetic equations, processes with memory.

Модели случайного транспорта частиц в средах со сложной структурой применяются при описании стохастических процессов в физике, химии, биологии, в различных технических приложениях. Таким процессам, в частности, присущи эффекты «памяти», когда особенности первоначального распределения частиц сохраняются на протяжении всего времени наблюдения процесса. Для составления кинетических уравнений, описывающих эволюцию плотности распределения частиц при наличии таких эффектов, часто применяется метод случайных блужданий с непрерывным временем (Continuous Time Random Walks - CTRW) [1]. В основе метода лежит разложение плотности распределения $f(X, t)$ нахождения частицы в точке X фазового пространства в виде суммы по числу случайных переходов, совершенных частицей к моменту наблюдения t . Эти переходы

следуют один за другим в непрерывном времени, что дает возможность записать кинетическое уравнение процесса с помощью линейных интегральных операторов. Ядра операторов выражаются через плотности распределения смещения частицы из точки X' в точку X в результате единичного перехода $W(X|X')$ и длительности интервала между переходами $T(t)$. Например, процесс диффузии частиц в среде с ловушками описывается уравнением

$$f(X, t) = \left(1 - \int_0^t dt' T(t')\right) f_0(X) + \int_0^t dt' \int dX' W(X|X') T(t-t') f(X', t'), \quad (1)$$

где $f_0(X)$ - плотность распределения в начальный момент времени, а символ $\int dX$ обозначает интегрирование по всей области изменения непрерывных координат и суммирование по всем значениям дискретных.

Характер процесса, описываемого уравнением (1), определяется средним временем пребывания частицы в ловушке $\langle t \rangle = \int_0^\infty T(t) t dt$. Если $\langle t \rangle$ конечно, то при больших временах наблюдения $t \gg \langle t \rangle$ уравнение (1) сводится к уравнению Колмогорова - Феллера для марковского случайного процесса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int dX' (\tilde{W}(X|X') f(X', t) - \tilde{W}(X'|X) f(X, t)), \quad (2)$$

где $\tilde{W}(X|X') = W(X|X') / \langle t \rangle$, а начальное условие имеет вид $f(X, t=0) = f_0(X)$. Если $\langle t \rangle$ бесконечно (например, $T(t) \sim t^{-(1+\gamma)}$ при $t \rightarrow \infty$ и $0 < \gamma < 1$), то уравнение (1) описывает субдиффузионный транспорт в среде с «памятью».

Уравнения модели CTRW типа (1) удобно для описания процессов в стационарной среде, когда функциональный вид и параметры распределений W и T остаются неизменными в течение всего времени наблюдения. Но при изучении различных систем могут встречаться ситуации, когда условия случайного транспорта изменяются в ходе процесса. Если характерное время этих изменений t_c велико по сравнению с $\langle t \rangle$, то при $t \geq t_c \gg \langle t \rangle$ их можно считать «адиабатическими» и учесть в уравнении (2), вводя соответствующую параметрическую зависимость функции \tilde{W} от времени t . Если же величина $\langle t \rangle$ оказывается сравнимой с t и t_c , то такой подход применить нельзя. В этом случае асимптотика при $t \rightarrow \infty$ плотности $T(t)$ в уравнении (1) определяет не только длительность оче-

редного пребывания частицы в ловушке, но и вид распределения $f(X, t)$. Частица, попав в ловушку, может «почувствовать» внешние изменения только по окончании времени ожидания, которое распределено по закону $T(t)$ и может с заметной вероятностью быть сравнимым со временем на- блуждения.

Предлагаемый в настоящей работе подход к описанию случайного процесса с «памятью» основан на формальной замене его марковским процессом с дополнительной фазовой координатой [2]. Эта координата τ определяет время, прошедшее с момента последнего попадания частицы в ловушку, и может быть названа собственным временем частицы. Этот процесс в расширенном фазовом пространстве $\{X, \tau\}$ может быть описан следующим образом. В каждый малый промежуток времени $(t, t + \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow 0$, частица, находящаяся в момент t в ловушке в точке (X', τ) , де- лает случайный выбор: с вероятностью $q(\tau)\tau_0$ остаться в ловушке или с вероятностью $1 - q(\tau)\tau_0$ перейти в другую ловушку. В первом случае ее координата X' не меняется, а собственное время τ увеличивается на ве- личину τ_0 . Во втором случае новая координата X выбирается в соответ- ствии с плотностью распределения $W(X | X')$, а собственное время τ ста- новится равным нулю. Кинетическое уравнение для плотности распреде- ления $f(X, \tau, t)$ данного процесса может быть записано в форме Колмого- рова - Феллера [3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial \tau} + \int_0^{\infty} d\tau' \int dX' \left(\tilde{W}(X, \tau | X', \tau') f(X', \tau', t) - \tilde{W}(X', \tau' | X, \tau) f(X, \tau, t) \right), \quad (3)$$

где

$$\tilde{W}(X, \tau | X', \tau') = \delta(\tau) q(\tau') W(X | X'), \quad (4)$$

$\delta(\tau)$ – дельта-функция. Начальное условие должно быть записано в виде

$$f(X, \tau, t = 0) = f_0(X) \delta(\tau). \quad (5)$$

Плотность $f(X, t)$ может быть получена интегрированием решения урав- нения (3) по собственному времени τ :

$$f(X, t) = \int_0^{\infty} f(X, \tau, t) d\tau. \quad (6)$$

Функция $q(\tau)$ должна выражаться через плотность распределения длительности ожидания в ловушке $T(\tau)$. Для установления этой зависи- мости было проведено формальное разложение в ряд по степеням W ре-

шения уравнения (1) и решения уравнения (3) с начальным условием (5) с учетом (4) и (6). Сравнение полученных разложений дает следующее выражение для $q(\tau)$:

$$q(\tau) = T(\tau) / \left(1 - \int_0^\tau T(\tau') d\tau' \right). \quad (7)$$

Заметим, что при выборе $T(\tau) = \langle t \rangle^{-1} \exp(-\tau / \langle t \rangle)$ уравнение (3) с учетом (4), (5), (7) после интегрирования по собственному времени приобретает вид (2).

Таким образом, в работе предложено кинетическое уравнение (3) типа Колмогорова – Феллера, описывающее блуждание частицы в среде с ловушками и содержащее дополнительную переменную – собственное время частицы. Это уравнение может быть полезно при моделировании нестационарных процессов в подобных средах, поскольку допускает параметрическую зависимость ядра (4) от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королев Л.В.* Моделирование совмещенных случайных процессов / Л.В. Королев, Д.О. Быгов // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. С. 130–135.
2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит.-ры, 1988. 208 с.
3. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986, 538 с.

УДК 532.5

В. А. Коромыслов

ЯФ МИИТ, ЯФ РЭУ им. Г.В. Плеханова
Россия, г. Ярославль, e-mail: s_myslov@mail.ru

КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРУИ В ОРТОГОНАЛЬНОМ ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Получены критические условия реализации неустойчивости незаряженной струи, находящейся в ортогональном однородном электростатическом поле.

Ключевые слова: струя, электростатическое поле, неустойчивость.

V. A. Koromyslov

Yaroslavl Branch of MIIT, Yaroslavl Branch of PRUE
Russia, Yaroslavl, e-mail: s_myslov@mail.ru

CRITICAL CONDITIONS OF INSTABILITY OF THE JET IN ORTHOGONAL UNIFORM ELECTROSTATIC FIELD

The critical conditions of realization of instability of the jet in orthogonal uniform electrostatic field are obtained.

Keywords: jet, electrostatic field, instability.

Исследование капиллярных осцилляций и устойчивости цилиндрической заряженной струи представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена (см., например [1-2]).

Еще в 1882 году Рэлей исследовал влияние электрического заряда на устойчивость струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости [3]. С тех пор было опубликовано большое количество работ, посвященных исследованию устойчивости струи при различных усложняющих проблеме внешних условиях, таких как заряд, вязкость жидкости, наличие внешней среды и внешнего электрического поля и т.д. (см., например [4-7]). Однако, несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ по данной тематике, многое в физике происходящих процессов остается до сих пор невыясненным и по-прежнему привлекает внимание исследователей. В частности, слабо изучено влияние на устойчивость струи внешнего электростатического поля. В опубликованных ранее работах (см. например, [6,7]) рассматривалось только продольное поле и совсем не рассматривалось влияние ортогонального поля. Либо рассматривались поля для других геометрических объектов (см. например, [8,9]).

Рассмотрим бесконечную струю постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле \mathbf{E}_0 , перпендикулярное оси струи.

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат. При этом будем считать, что начало координат движется вместе со струей, так что относительно начала координат струя в нулевом приближении остается неподвижной. В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными волнами на ее поверхности и в

безразмерных переменных $R = \rho = \sigma = 1$, в которых будет проведено все рассмотрение, является параметром такого же порядка малости, что и амплитуда волн. Движение жидкости будем принимать потенциальным, т.е. $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Psi(\mathbf{r}, t)$, где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ – потенциал поля скоростей волнового движения жидкости. Зададимся целью исследовать критические условия реализации неустойчивости капиллярных волн на поверхности такой струи.

Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad \left| \xi \right| \ll 1; \quad (1)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты; t – время; ξ – функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

Математическая формулировка в рамках модели потенциального течения будет состоять из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе Ψ и электростатического потенциала Φ в окрестности струи:

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Delta \Phi = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности решений на оси струи и в бесконечности

$$r \rightarrow 0: \quad \left| \nabla \Psi \right| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \left| \nabla \Phi \right| \rightarrow \mathbf{E}_0; \quad (3)$$

граничных условий на свободной поверхности (1):
кинематического:

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \Psi \cdot \nabla F = 0; \quad F(r, \varphi, z, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)]; \quad (4)$$

динамического:

$$r = 1 + \xi: \quad \Delta P - \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla \Phi)^2 - \nabla \cdot \vec{n} = 0; \quad (5)$$

и условия эквипотенциальности поверхности струи

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi = \Phi_s(t). \quad (6)$$

В выражении (5) ΔP – перепад давлений внутри и вне струи в равновесном состоянии ($\xi = 0, \Psi = 0$); предпоследнее и последнее слагаемые – давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно; \vec{n} – вектор нормали к поверхности (1).

Краевую задачу (1) – (6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi\chi\lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda; \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \pi\lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Для полного замыкания системы уравнений (2) – (8) необходимо задать еще начальные условия. Однако в силу того, что начальные условия произвольного вида могут привести к чрезмерной громоздкости получаемого решения, в нелинейных задачах об отыскании периодических волновых профилей поверхности идеальной жидкости принято выбирать начальные условия так, чтобы решение принимало наиболее простой вид (см., например, [4, 5]).

Будем искать решение задачи (2) – (8) в виде разложения по малому параметру, в качестве которого выберем отношение амплитуды волны к радиусу струи.

Используя метод многих масштабов подобно тому, как это проделано в [4, 5], получим две связанные системы уравнений относительно коэффициентов, определяющих возмущение поверхности струи в первом $\zeta_m^{(1)(\pm)}$ и втором $\zeta_m^{(2)(\pm)}$ порядке малости:

$$\begin{aligned} & \left\{ X_m(k) \left[\zeta_{m-2}^{(1)(+)} \cdot \exp(im\varphi) + \zeta_{m-2}^{(1)(-)} \cdot \exp(-im\varphi) \right] + \right. \\ & + \left[\frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} + 1 - m^2 - k^2 - w \cdot (1 + H_m(k)) \right] \left[\zeta_m^{(1)(+)} \cdot \exp(im\varphi) + \zeta_m^{(1)(-)} \cdot \exp(-im\varphi) \right] + \\ & \left. + Y_m(k) \left[\zeta_{m+2}^{(1)(+)} \cdot \exp(im\varphi) + \zeta_{m+2}^{(1)(-)} \cdot \exp(-im\varphi) \right] \right\} \cdot \exp(-i\theta) + \text{к.с.} = 0; \\ & \left\{ X_m(k) \left[\zeta_{m-2}^{(2)(+)} \cdot \exp(im\varphi) + \zeta_{m-2}^{(2)(-)} \cdot \exp(-im\varphi) \right] + \right. \\ & + \left[\frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} + 1 - m^2 - k^2 - w \cdot (1 + H_m(k)) \right] \left[\zeta_m^{(2)(+)} \cdot \exp(im\varphi) + \zeta_m^{(2)(-)} \cdot \exp(-im\varphi) \right] + \\ & \left. + Y_m(k) \left[\zeta_{m+2}^{(2)(+)} \cdot \exp(im\varphi) + \zeta_{m+2}^{(2)(-)} \cdot \exp(-im\varphi) \right] \right\} \cdot \exp(-i\theta) + \text{к.с.} = f_m(k, t); \end{aligned} \quad (9)$$

где $\theta \equiv k \cdot z - \omega_m(k) \cdot t$, а $\omega_m(k)$ - частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m ; функции неоднородности $f_m(k, t)$, определяются через коэффициенты $\zeta_m^{(1)(\pm)}$, которые являются решениями системы (9); коэффициенты $X_m(k), Y_m(k), G_m(k), H_m(k), w$ определяются следующим образом:

$$X_m(k) = -\frac{w}{2}[1 + H_{m-2}(k)], \quad Y_m(k) = -\frac{w}{2}[1 + H_{m+2}(k)],$$

$$G_m(k) \equiv \frac{k \cdot I'_m(k)}{I_m(k)}; \quad H_m(k) \equiv \frac{k \cdot K'_m(k)}{K_m(k)}; \quad w \equiv \frac{E_0^2}{2\pi}.$$

Здесь $I_m(k)$ и $K_m(k)$ - модифицированные функции Бесселя.

Если пренебречь азимутальным взаимодействием гармоник, т.е. положить равным нулю коэффициенты $X_m(k)$ и $Y_m(k)$, легко получить дисперсионное уравнение, связывающее волновое число k и азимутальное число m с частотой колебаний ω :

$$\omega_m^2(k) = G_m(k) \left[k^2 + m^2 - 1 + w \cdot (1 + H_m(k)) \right]. \quad (11)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (11)

$$k^2 + m^2 - 1 + w \cdot (1 + H_m(k)) = 0$$

определяет условие нейтрального равновесия струи.

Таким образом, величина электрического поля, при котором гармоника с заданными значениями k и m становится неустойчивой, определяется неравенством

$$w \geq \frac{1 - k^2 - m^2}{1 + H_m(k)}.$$

Фактически отсутствие азимутального взаимодействия сводит систему уравнений (9), (10) к уравнениям, получающимся в задаче о равномерно заряженной струе, решение которой известно и достаточно подробно проанализировано [4,5]. Только вместо параметра $W \equiv 4\pi \cdot \chi^2$, величина которого определяется поверхностной плотностью заряда χ , в данной задаче используется параметр w , значение которого определяется величиной внешнего электростатического поля.

Учет азимутального взаимодействия приводит в системе (9), (10) к тому, что кроме гармоник с заданным изначально возмущением m и k , а также гармоник с азимутальным числом $2m$ и волновым $2k$, возбуждающихся во втором порядке малости (см. [4, 5]), возбуждаются гармоники с азимутальными номерами $m \pm 2$, $m \pm 4$ и т.д., а также $2m \pm 2$, $2m \pm 4$ и т.д.

Очевидно, возбуждение гармоник с большими значениями m будет слабо влиять на устойчивость струи и приведет только к появлению мелкомасштабных возмущений на ее поверхности (рис. 1, в).

Тогда как возбуждение гармоник с малыми значениями m увеличивает вероятность монодисперсного распада струи (в случае неустойчивости гармоники с $m = 0$) (рис. 1, а) или распада струи на две в случае неустойчивости гармоники с $m = 2$ (рис. 1, б). Описанная ситуация наблюдалась при

производстве фильтров Петрянова. По словам очевидца, струя жидкого полимера перед застытием приобретала в поперечном разрезе форму гантели, а в некоторых случаях распалась на две отдельные струи.

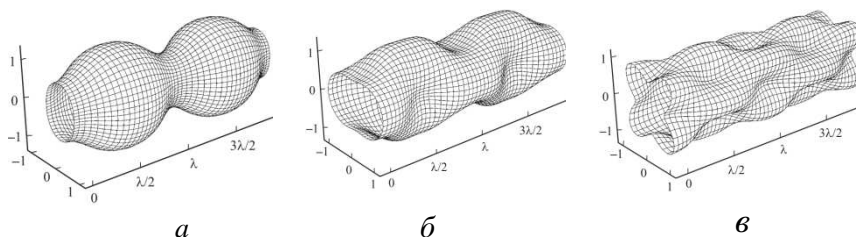


Рис. 1. Форма поверхности нелинейно осциллирующих струй при докритических в смысле устойчивости по отношению собственному заряду значениях поверхностной его плотности, рассчитанные при $\varepsilon = 0.3, k = 2, a - W = 0.5, m = 0$; б – $W = 1, m = 2$; в – $W = 1, m = 4$. Результаты расчетов взяты из [4]

Однако следует отметить, что расчеты, проведенные для аналогичных задач с каплей, показывают, что межмодовое взаимодействие при малых значениях электрического поля весьма слабо влияет на форму поверхности жидкости (см. [10]). Так, если изначально была возбуждена только одна мода, амплитуда соседних мод, возбуждающихся в результате межмодового взаимодействия, была примерно на порядок меньше изначально возбужденной, и чем дальше номер врзбужденной моды от начальной, тем меньше амплитуда. Однако иная картина наблюдалась, если внешнее поле было близко к критическому. В этом случае амплитуда малых мод ($m = 2, 3, 4$) нарастала достаточно быстро. Так что вполне можно ожидать, что и у струи в однородном поле будет наблюдаться сходная ситуация, только роль мод в случае струи будут играть азимутальные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Е.В. Аметистов, В.В. Блаженков, А.К. Городов [и др.]; под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
2. Ширяева С.О. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, М.В. Волкова. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
3. Strutt J.W. (LordRayleigh) // Proc. London Math. Soc. 1878. Vol. 10. P. 4-13.
4. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74, вып. 8. С.6-17.
5. Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 9. С.31-41.
6. Ширяева С.О. // ЖТФ. 2011. Т.81, вып. 06. С.36-41.
7. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушев Н.А., Полянцев Н.А. // ЖТФ. 2012. Т.82, вып. 08. С.35-41.
8. Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т.80, вып.08. С.22-31.
9. Коромыслов В.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2002. Т.72, вып. 09. С.21-28.
10. Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т.76, вып. 05. С.16-24.

УДК 330.4

Е. Ю. Лискина, О. П. Серова

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, *e-mail*: e.liskina@rsu.edu.ru, lyolka92@gmail.com

**ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ
ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСКОЙ АКТИВНОСТИ
НАСЕЛЕНИЯ РОССИИ ОТ ОБЪЕМА ИНВЕСТИЦИЙ
В ОСНОВНОЙ КАПИТАЛ МАЛЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ**

В представленной статье методами регрессионного анализа проводится оценка зависимости предпринимательской активности населения Российской Федерации от объема инвестиций в основной капитал малых предприятий. Данная работа является частью исследования, цель которого – построение регрессионной модели предпринимательской активности населения Российской Федерации.

Ключевые слова: предпринимательская активность, инвестиции, регрессионный анализ.

E. U. Liskina, O. P. Serova

*Ryazan State University named for S. Yesenin,
Russia, Ryazan, e-mail: e.liskina@rsu.edu.ru, lyolka92@gmail.com*

**ECONOMETRIC ANALYSIS OF THE DEPENDENCE
OF THE RUSSIAN POPULATION'S
ENTREPRENEURIAL ACTIVITY ON INVESTMENTS
IN SMALL BUSINESS'S FIXED CAPITAL**

In this paper is estimated the dependence of the Russian population's entrepreneurial activity on investments in small business's fixed capital using methods of regression analysis. This paper is the part of research, which object is the developing of the regression model of entrepreneurial activity of population of Russian Federation.

Keywords: entrepreneurial activity, investments, regression analysis.

В современных условиях малый бизнес имеет большое значение для экономики развитых стран. Например, в США, Японии и Европе доходы от деятельности малых предприятий формируют значительную часть ВВП (40–60%) [1]. В России этот показатель составляет только 20 %. С 2006 года различные организации проводят мониторинги национального уровня и

масштабов предпринимательства [2-4]. Однако отсутствует открытая информация о степени влияния перечисленных в этих мониторингах экономических факторов на предпринимательскую активность. Поэтому актуальна задача количественного определения этой степени влияния для каждого из факторов. Полученная информация даёт возможность управлять стимулированием роста национальной экономики за счет малого бизнеса через наиболее влиятельные экономические факторы. В данной работе исследуется зависимость предпринимательской активности от объема инвестиций в основной капитал малых предприятий.

Ранее [5] авторами был введен числовой показатель уровня предпринимательской активности населения – плотность малых предприятий (SBD_t), определяемый как отношение числа малых предприятий в РФ к численности экономически активного населения в t -том году.

На основе исходных данных [6] о динамике объемов инвестиций в основной капитал малых предприятий I_t и плотности малых предприятий (SBD_t , табл. 1), была построена диаграмма рассеяния (рис. 1).

Таблица 1. Исходные данные для анализа зависимости SBD_t от I_t

t	SBD_t	I_t
2000	12,06	24,25
2001	11,77	43,47
2002	12,19	49,73
2003	12,33	67,30
2004	13,20	99,23
2005	13,34	120,47
2006	13,95	171,32
2007	14,98	259,07
2008	17,79	412,18
2009	20,36	347,23
2010	21,78	255,73
2011	24,23	431,57
2012	26,47	521,82
2013	27,32	574,93
2014	26,33	662,43

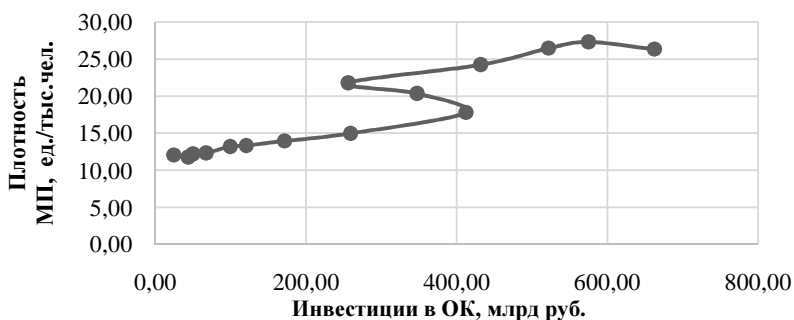


Рис. 1. Диаграмма рассеяния SBD_t в зависимости от I_t

Как видно из графика, тенденция неоднородна вследствие влияния кризисных явлений в 2009–2010 гг. Было сделано предположение о том, что зависимость между анализируемыми показателями характеризуется моделью с переменной структурой.

Для проверки гипотезы об однородности обеих частей выборки значений показателя I_t был проведен тест Чоу [7, с. 258]. С этой целью выборка I_t была разделена на две подвыборки – ИНВ 1 (Чоу) (с 2000 по 2008 годы) и ИНВ 2 (Чоу) (с 2009 по 2014 годы). Критерием для разделения стала смена тенденции динамики значений показателя I_t в 2009 году (рис. 2).

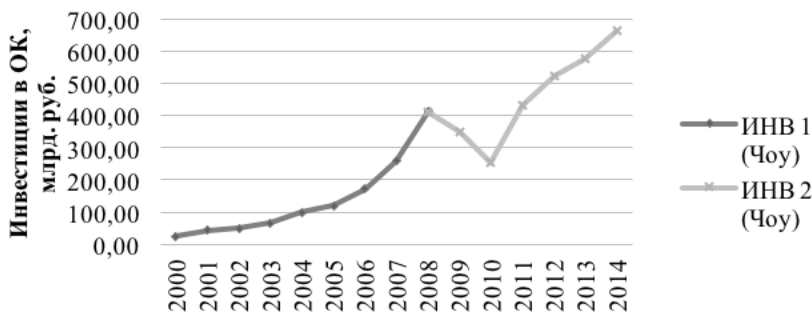


Рис. 2. Динамика показателя I_t и его разделение на подвыборки для теста Чоу

Нулевая гипотеза: «подвыборки ИНВ 1 (Чоу) и ИНВ 2 (Чоу) однородны» при конкурирующей гипотезе «подвыборки ИНВ 1 (Чоу) и ИНВ 2

(Чоу) неоднородны». Наблюдаемое и критическое значения критерия Чоу получились следующие: $F_n = 28,22$, $F_{кр} = 4,67$. Поскольку $F_n > F_{кр}$, то нулевая гипотеза об однородности подвыборок с вероятностью 95 % отвергается.

Далее по методу Гуйарати [7, с. 261] было выполнено моделирование зависимости SBD_t от I_t с учетом структурных изменений. С этой целью мы ввели фиктивную переменную z , позволяющую определить величину сдвига и принимающую следующие значения:

$$z = \begin{cases} 0 & \text{при } t = \overline{2000, 2008}, \\ 1 & \text{при } t = \overline{2009, 2014}; \end{cases}$$

и перекрестную фиктивную переменную zt , позволяющую определить величину изменения наклона. Данные для проведения регрессионного анализа представлены в табл. 2.

Таблица 2. Исходные данные для построения модели зависимости SBD_t от I_t по методу Гуйарати

t	SBD_t	I_t	z	zt
2000	12,06	24,25	0	0
2001	11,77	43,47	0	0
2002	12,19	49,73	0	0
2003	12,33	67,30	0	0
2004	13,20	99,23	0	0
2005	13,34	120,47	0	0
2006	13,95	171,32	0	0
2007	14,98	259,07	0	0
2008	17,79	412,18	0	0
2009	20,36	347,23	1	2009
2010	21,78	255,73	1	2010
2011	24,23	431,57	1	2011
2012	26,47	521,82	1	2012
2013	27,32	574,93	1	2013
2014	26,33	662,43	1	2014

По данным табл. 2 были построены следующие регрессионные модели с переменной структурой:

– ИНВ 1: $SBD_t = a + b_1 I_t + b_z z + b_{zt} zt + b_t t$,

– ИНВ 2: $SBD_t = a + b_1 I_t + b_z z + b_{zt} zt$,

– ИНВ 3: $SBD_t = a + b_1 I_t + b_{zt} zt$,

– ИНВ 4: $SBD_t = a + b_1 I_t + b_z z$.

Коэффициенты и статистические характеристики построенных моделей представлены в табл. 3.

Таблица 3. Статистические характеристики моделей зависимости SBD_t от I_t

Параметр	Обозначение	ИНВ 1	ИНВ 2	ИНВ 3	ИНВ 4
Свободный член	a	-377,21	11,63	11,35	11,34
Коэффициент при I_t	b_1	0,01	0,01	0,02	0,02
Коэффициент при z	b_z	-863,99	-740,21	–	5,79
Коэффициент при zt	b_{zt}	0,43	0,37	0,003	–
Коэффициент при t	b_t	0,19	–	–	–
t-статистика для a	t_a	-0,85	26,51	28,45	28,42
t-статистика для b_1	t_{b_1}	2,24	5,8	8,38	8,39
t-статистика для b_z	t_{b_z}	-1,5	-1,34	–	7,46
t-статистика для b_{zt}	$t_{b_{zt}}$	1,51	1,35	7,47	–
t-статистика для b_t	t_{b_t}	0,88	–	–	–
Критическая точка	$t_{кр}$	2,23	2,20	2,18	2,18
Коэффициент корреляции	R^2	0,9839	0,9827	0,9799	0,9798
Средняя ошибка аппроксимации	\bar{A}	0,0283	0,027	0,027	0,027
Статистика Дарбина-Уотсона	DW	1,9637	2,0738	2,0275	2,0250
F-статистика	F_n	612,53	625,04	584,47	583,15
Критическая точка	$F_{кр}$	3,48	3,59	3,89	3,89
Уровень значимости	α	0,05	0,05	0,05	0,05
Стандартная ошибка	s_y	0,893	0,884	0,913	0,914
Объем выборки	n	15	15	15	15

Из табл. 3 следует:

модели ИНВ 1 и ИНВ 2 имеют незначимые по t -критерию Стьюдента коэффициенты (кроме b_1) на уровне значимости 5%;

модели ИНВ 3 и ИНВ 4 достаточно близки по своим статистическим характеристикам и статистически значимы на уровне 5 %.

Отметим, что изменение наклона в модели ИНВ 3 не существенно, так как $b_{z1} = 0,003$, тогда как изменение в виде сдвига в модели ИНВ 4 имеет величину $b_z = 5,79$ (см. рис. 2). В связи с этим для дальнейшего использования следует выбрать модель ИНВ 4, уравнение которой имеет вид

$$SBD_t = \begin{cases} 11,35 + 0,02I_t & \text{при } t = \overline{2000, 2008}; \\ 17,14 + 0,02I_t & \text{при } t = \overline{2008, 2014}. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манохин А.Ю.* Стратегия развития малого и среднего предпринимательства в современной России: монография. Тамбов: Изд-во НОУ ВПО Рос. новый ун-т, 2010.
2. Глобальный мониторинг предпринимательства (GEM) [Электронный ресурс] / Высшая школа менеджмента Санкт-Петербургского гос. ун-та. Режим доступа: <http://gsom.spbu.ru/research/eship/projects/gem/> (дата обращения: 21.03.2016 г.).
3. Инвестиционные рейтинги регионов России [Электронный ресурс] / Рейтинговое агентство RAEX («Эксперт РА»). Режим доступа: http://www.raexpert.ru/rankings/#r_1108 (дата обращения: 21.03.2016 г.).
4. Рейтинг регионов по предпринимательской активности [Электронный ресурс] / РИА «Клуб регионов». Режим доступа: <http://club-rf.ru/theme/388> (дата обращения: 21.03.2016 г.).
5. *Серова О.П.* Эконометрический анализ влияния уровня предпринимательской активности населения на занятость и самозанятость населения и валовой региональный продукт Российской Федерации / О.П. Серова, Е.Ю. Лискина // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» (26–28 апреля 2016 г.). Рязань: Изд-во РГУ им. С.А. Есенина, 2016. С. 275–280.
6. Малое и среднее предпринимательство в России [Электронный ресурс] // Федеральная служба государственной статистики. Режим доступа: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1139841601359 (дата обращения: 20.09.2016 г.).
7. *Елисеева И.И.* Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева [и др.]; под. ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2007. 576 с.

УДК 504.064.2.001.18

Т. К. Рощина

Южно-Российский государственный политехнический
университет (НПИ) им. М.И. Платова
Россия, г. Новочеркасск, e-mail: rghd@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ВЕЩЕСТВА В ГРЯЗЕВОМ МЕСТОРОЖДЕНИИ

Рассматривается математическая модель, использованная для исследования динамики минерализации грязевого месторождения, и анализ результатов моделирования при условии постоянно меняющегося уровня рапы.

Ключевые слова: модель, минерализация, озеро, уровень воды, диффузия, подобие.

T. K. Roshchina

*Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
Russia, Novocherkassk, e-mail: rghd@mail.ru*

THE USE OF MATHEMATICAL MODELS TO CONTROL CONCENTRATION IN THE CURATIVE MUD OF THE LAKE

The mathematical model which used to study the dynamics of mineralization mud deposits and analysis of simulation results in a constantly changing level of the brine is considered in the article.

Keywords: model, salinity, the lake, the water level, diffusion, likeness.

Большинство интенсивно используемых грязевых месторождений представляют собой соленые озера, в которых пелоид образуется в виде донных отложений. Для многих таких природных объектов изменение уровня рапы [1] является постоянно действующим фактором. Он может быть следствием как естественных причин (действует в настоящее время на Тамбуканском озере), так и результатом антропогенного вмешательства в водное питание озер (Сакское озеро, Тамбуканское озеро с 1930 по 1965 гг.). Не рассматривая этих конкретных причин, изменение концентрации отдельной минеральной соли можно описать уравнением диффузии [2]

$$\frac{\partial c(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(D(x) \cdot \frac{\partial c(x, \tau)}{\partial x} \right)}{\partial x}, \quad (1)$$

где $c(x, \tau)$ – концентрация; τ – время; $D(x)$ – коэффициент диффузии исследуемого вещества. При этом ось Ox направлена вертикально вверх, а ее ноль находится на расстоянии $(h_p + h_\Gamma)$ от поверхности водоема; h_Γ – толщина слоя лечебной грязи; h_p – глубина рапы (начальная). Зависимость коэффициента диффузии от x следует из неоднородности системы “рапа-лечебная грязь”.

Если закон изменения уровня рапы в соленом озере (параметр, реально поддающийся наблюдению) представляется функцией $\chi(\tau)$ ($\chi(\tau) > 0, \tau \geq 0$), то условия однозначности для уравнения (1) выглядят следующим образом:

1. Начальное условие: $\chi(0) = h_p; c(x, 0) = \mu(x), \mu(x) > 0$, причем $\mu(x) > \mu(x)$, что подтверждается практическими наблюдениями.
 $0 \leq x \leq h_\Gamma \quad h_\Gamma < x \leq h_\Gamma + h_p$

2. На нижней границе месторождения – условие непроницаемости (однородное граничное условие второго рода): $\frac{\partial c(x, \tau)}{\partial x} = 0$ при $x = 0$.

3. На поверхности водоема – условие “опреснения”: $c(x, h_\Gamma + \chi(\tau)) = v(\tau)$, где под “опреснением” понимаем выполнение следующего соотношения: $\max v(\tau) \leq \min \mu(x)$.

Дополнительно, так как $D(x)$ имеет как минимум один разрыв первого рода при $x = h_\Gamma$, задаются условия неразрывности поля концентрации и потока вещества в этой точке.

Применив к уравнению (1) дифференциальное подобие, основанное на деформации области $0 \leq x \leq h_\Gamma$ таким образом, чтобы всюду при $0 \leq x \leq h_\Gamma + \chi(\tau)$ использовался один и тот же коэффициент диффузии вещества D_p , подстановку $\bar{x} = \frac{x}{\chi(\tau)}$, а вместо концентрации – ее относительную величину $\bar{c}(x, \tau) = \frac{c(x, \tau) - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}}$, получим уравнение

$$\frac{\partial \bar{c}(x, \tau)}{\partial \tau} = D(\tau) \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}(x, \tau)}{\partial \bar{x}^2} + v(x, \tau) \cdot \frac{\partial \bar{c}(x, \tau)}{\partial \bar{x}}, \quad (2)$$

где для удобства символы “ $\bar{}$ ” над новыми переменными опущены;

$D(\tau) = \frac{D_p}{\chi(\tau)}$; $v(x, \tau) = x \cdot \frac{\chi'(\tau)}{\chi(\tau)}$; D_p – коэффициент диффузии исследуемого вещества в рапе.

Соответствующим образом изменяются и условия однозначности.

При этом верхняя граница остается постоянной при $x = 1$, а если $v(\tau) = c_p = \text{const}$, и к тому же положить $c_{\min} = c_p$, то граничное условие при $x = 1$ тоже становится однородным.

Для решения уравнения (2) используется метод конечных разностей, а для анализа полученных результатов область $0 \leq x \leq h_\Gamma$ приводится к своему исходному размеру, выполняется обратная подстановка $x \cdot \chi(\tau)$, вычисляется среднее значение относительной концентрации по формуле

$$c_{cp}(\tau_j) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{c(x, \tau_j) dx}{x_b - x_a}, \quad (3)$$

где τ_j – некоторый момент времени на сетке, использованной для численного решения уравнения (2). Среднее значение (3) рассчитывается отдельно для области лечебной грязи и отдельно – для рапы.

Анализ результатов решения уравнения (2) наглядно показал ограниченность регулирования уровня минерализации в грязевом месторождении при помощи управляемого изменения уровня рапы. В любом случае, при принятых начальных условиях, концентрация вещества в грязи всегда убывает – независимо от направления изменения уровня рапы. Для самой рапы, в случае постоянного возрастания ее уровня, особых проблем нет – концентрация вещества в рапе постоянно убывает. Более сложный результат наблюдается при уменьшении уровня рапы – концентрация вещества сначала действительно возрастает, а затем все равно начинает убывать.

По результатам решения исследовалось значение времени τ_m , начиная с которого концентрация вещества начинает убывать при продолжающемся уменьшении уровня рапы. В качестве параметров использовались начальная концентрация вещества в рапе c_Γ , начальная глубина рапы h_1 , конечная глубина рапы h_2 . Функция $\chi(\tau)$ – линейная, проходящая через точки $(h_1, 0)$ и (h_2, T_{\max}) , где T_{\max} – общее время наблюдения равное 5 годам.

Зависимость τ_m от c_Γ при постоянных h_1 и h_2 – чем больше c_Γ , тем меньше τ_m . В этом случае проявляется действие известного принципа максимума для параболических уравнений. Зависимость τ_m от h_2 при постоянных c_Γ и h_1 – чем меньше h_2 , тем меньше τ_m , что можно было бы объяснить увеличением скорости изменения глубины рапы, если бы при постоянных c_Γ и h_2 время τ_m оставалось постоянным при любых h_1 . То есть здесь, очевидно, определяющим является общий размер системы – насколько граница рапы, на которой действует условие “опреснения”, приводящее, в конце концов, к наблюдаемому эффекту, близка к h_Γ .

В любом случае, τ_m в большинстве случаев превышает 4 года, но меньше 5 лет, что позволяет сделать вывод о гарантированном достижении желаемого результата – повышения концентрации вещества в грязевом ме-

сторождении за счет уменьшения уровня рапы – только если продолжительность такого воздействия не превышает четырех лет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ушаков В.Г.* Тепловые процессы в бальнеотехнике лечебных грязей. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1992. 219 с.
2. *Рощина Т.К.* Методы решения эволюционных задач массообмена // Теплофизические измерения в начале XXI века. IV междунар. теплофизическая школа. Тамбов: ТГТУ, 2001. Ч.1. С.122-123.

УДК 51-74

З. Г. Салахутдинова, Е. С. Салахутдинова

Военная академия радиационной, химической и биологической защиты
им. Маршала Советского Союза С.К. Тимошенко
Россия, Кострома, e-mail: exp.km@mail.ru

ВОЕННО-ЛОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЯЖЕЛЫХ ОГНЕМЕТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ НАНЕСЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО УРОНА ПРОТИВНИКУ

В статье приводится пример решения задачи по поиску оптимального варианта распределения тяжелых огнеметных систем для максимально эффективного удара по технике и живой силе противника.

Ключевые слова: оптимальное распределение, оптимизация, поражающий потенциал, вероятность поражения.

Z. G. Salakhutdinova, E. S. Salakhutdinova

*Military Academy of Radiation, Chemical and Biological Protection
them. Marshal S.K. Tymoshenko
Russia, Kostroma, e-mail: exp.km@mail.ru*

MILITARY LOGIC PROBLEM OF DISTRIBUTION SYSTEMS FOR HEAVY FLAMETHROWER CAUSE MAXIMUM DAMAGE TO THE ENEMY

The article give an example of solving the problem of finding the optimal variant of distribution of heavy flamethrower systems to maximize the impact on technology and manpower of the enemy.

Keywords: optimal distribution, optimization, defeating potential, probability of failure.

Процесс математического моделирования прикладной задачи условно можно разбить на три этапа:

I этап: Словесная и математическая постановка исходной задачи и исследование математической задачи на корректность.

II этап: Разработка методов решения и обоснование выбранного метода.

III этап: Проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Рассмотрим задачу:

В подразделении войск РХБЗ имеется 14 огнеметных систем ТОС-1. С настоящего расположения на местности возможно атаковать три цели: автомобильную колонну, группу вражеской легкобронированной техники и пехоту противника. Необходимо найти оптимальный вариант распределения ТОСов по объектам удара и оценить его эффективность по математическому ожиданию поражаемой силы, выраженной в единицах боевого потенциала.

Боевой потенциал ударной группы приведен в табл. 1. Боевые потенциалы групповых целей приведены в табл. 2.

Таблица 1

Количество ударных единиц N_i	Типы групповых целей	Количество средств поражения на 1 ТОСе n_i	Вероятность поражения единичной цели одним залпом P_{1i}	Вероятность преодоления ПВО единичной цели P_{2i}
14	Автоколонна	3	0,34	0,7
	ЛБТ	3	0,42	0,76
	Пехота	3	0,56	0,79

Таблица 2

Групповые цели	Количество единиц в группе N_{2i}	Количество средств поражения на единичной цели n_{2i}	Вероятность поражения одной единицей вооружения одного ТОСа P_{3i}
Автоколонна	20	8	0,3
ЛБТ	40	4	0,24
Пехота	60	1	0,05

По исходным данным определим тип задачи, которую нам необходимо решить. Поставленная задача может быть представлена в виде задачи на распределение сил и средств поражения по целям.

Для решения задачи об оптимальном распределении ТОСов по групповым целям воспользуемся методом оптимизации аддитивной целевой функции.

Аддитивная целевая функция, являясь суммой частных нелинейных целевых функций, используется для оптимального распределения сил и боевых средств по задачам или объектам удара, представляющим одиночные и групповые наземные или воздушные цели. Оптимизация аддитивной функции может реализоваться в форме аналитической модели на основе метода условного экстремума.

Дадим математическую постановку задачи на следующем тактическом фоне. Имеется s объектов с важностями A_j ($j = 1 \dots s$), по которым планируется удар N однородными средствами поражения (огнеметными системами ТОС-1). Заданы вероятности поражения каждого из объектов одним боевым средством ω_i и вероятность преодоления их ПВО P_{2i} ($j = 1 \dots s$). Требуется определить оптимальный вектор $X_0 = (x_{0i})$, доставляющий максимум аддитивной целевой функции ущерба

$$F = \sum_{j=1}^s A_j (1 - \varepsilon_j^{p_{n_j} x_j})$$

при следующих ограничениях на искомые переменные и ее параметры:

$$X_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^s x_j = N, \quad A_j > 0, \quad 0 < \varepsilon_j = 1 - \omega_j < 1, \quad 0 < p_{n_j} < 1.$$

В нелинейной целевой функции x_j - наряды средств поражения по объектам удара; A_j - важность объектов, выражаемые в процентах или других физических единицах; F - функция ущерба, представляющая собой математическое ожидание поражаемых важностей, выраженных в процентной мере или в виде конкретных физических величин (поражаемых элементарных целей, составляющих групповой объект, единицах боевого потенциала).

Максимизация функции F означает нахождение такого варианта распределения N однородных средств по s объектам удара, при котором суммарный ущерб будет наибольшим.

Для решения задачи методом условного экстремума запишем функцию Лагранжа в виде

$$F^* = \sum_{j=1}^s A_j (1 - \varepsilon_j^{p_{n_j} x_j}) + \lambda (N - \sum_{j=1}^s x_j).$$

Для случая $s = 3$

$$F^* = A_1 (1 - \varepsilon_1^{p_{n_1} x_1}) + A_2 (1 - \varepsilon_2^{p_{n_2} x_2}) + A_3 (1 - \varepsilon_3^{p_{n_3} x_3}) + \lambda (N - x_1 - x_2 - x_3).$$

Находим частные производные $\frac{\partial F^*}{\partial x_j} (j=1\dots 3)$ и $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda}$ и приравняем их к нулю. В результате получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial x_1} &= -A_1 p_{n1} \ln \varepsilon_1 \varepsilon_1^{p_{n1} x_1} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial x_2} &= -A_2 p_{n2} \ln \varepsilon_2 \varepsilon_2^{p_{n2} x_2} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial x_3} &= -A_3 p_{n3} \ln \varepsilon_3 \varepsilon_3^{p_{n3} x_3} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial \lambda} &= N - x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Исключая неопределенный множитель Лагранжа λ , приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными $x_i (i=1\dots 3)$

$$B_1 \varepsilon_1^{p_{n1} x_1} = B_2 \varepsilon_2^{p_{n2} x_2}, \quad B_1 \varepsilon_1^{p_{n1} x_1} = B_3 \varepsilon_3^{p_{n3} x_3}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = N. \quad (2)$$

где $\kappa_i = \ln(1 - \omega_i) = \ln \varepsilon_i$, $B_i = A_i \kappa_i p_{ni}$ – некоторые приведенные коэффициенты. Коэффициент κ_i назовем приведенным коэффициентом эффективности средства поражения по i -му объекту удара, коэффициент B_i назовем приведенным коэффициентом важности i -го объекта.

Решая эту систему относительно x_i , получим расчетную формулу вида

$$x_i = \frac{1}{\left(1 + \frac{p_{n1} \kappa_1}{p_{n2} \kappa_2} + \frac{p_{n1} \kappa_1}{p_{n3} \kappa_3}\right)} \left(N + \frac{1}{p_{n2} \kappa_2} \ln \frac{B_2}{B_1} + \frac{1}{p_{n3} \kappa_3} \ln \frac{B_3}{B_1} \right). \quad (3)$$

Этот частный результат можно обобщить на общий случай и записать решение системы (2) в виде следующей обобщенной формулы:

$$x_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^s \frac{p_{ni} \kappa_i}{p_{pi} \kappa_i}} \left(N + \sum_{i \neq j}^s \frac{1}{p_{ni} \kappa_i} \ln \frac{B_i}{B_j} \right). \quad (4)$$

В частности, для $s=3$ и $j=1$ получаем формулу (3).

Возможен и другой вычислительный вариант. Сначала по формуле

$$x_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^s \frac{p_{n1} \kappa_1}{p_{ni} \kappa_i}} \left(N + \sum_{i=2}^s \frac{1}{p_{ni} \kappa_i} \ln \frac{B_i}{B_1} \right) \quad (5)$$

находится оптимальный наряд по первому объекту удара, а затем по системе формул

$$x_j = \frac{P_{n1}K_1}{P_{nj}K_j} \left(x_1 - \frac{1}{P_{n1}K_1} \ln \frac{B_i}{B_1} \right) \quad (6)$$

определяются оптимальные наряды по оставшимся $j = 2, 3, \dots, s$ объектам удара. В качестве критерия правильности решения задачи выступает условие

$$N = \sum_{j=1}^s x_j.$$

Многие задачи военного содержания допускают не один, а множество вариантов решений относительно искомых переменных. Ответить на вопрос, какое решение из этого множества является наилучшим без дополнительных условий, невозможно. В качестве такого дополнительного условия выступает целевая функция. Под целевой функцией будем понимать возможный конечный результат, который желательно получить путем выбора и реализации переменных, либо это количественный показатель эффективности функционирования процесса.

Итак, у нас есть тактико-технические данные ТОСов и трех видов групповых целей. Найдем оптимальное распределение ТОСов по целям для нанесения максимального урона противнику.

Исходя из словесной постановки задачи, данную задачу будем решать методом выбора оптимального маршрута, с помощью аналитической оптимизации.

Решение данной задачи включает в себя следующие этапы:

- 1) Расчет поражающего потенциала каждой из групп целей.
- 2) Определение вероятности поражения, наносимого одним ТОСом каждой из групповых целей.
- 3) Определение важности целей выражаемых в единицах поражающего потенциала.
- 4) Определение условных коэффициентов эффективностей.
- 5) Определение обобщенных важностей целей.
- 6) Определение оптимального наряда ТОСов по автоколонне.
- 7) Определение оптимального наряда ТОСов по легкобронированной технике и пехоте.
- 8) Определение оптимального решения задачи.

Итак, приступим к решению задачи поэтапно:

- 1) Рассчитать поражающий потенциал единичных целей по формуле

$$B_{li} = n_{2i} \cdot P_{3i},$$

где B_{1i} - поражающий потенциал единичных целей; n_{2i} - количество средств поражения на единичной цели; P_{3i} - вероятность поражения одной единицей вооружения одного ТОСа.

$$B_{11} = 8 \cdot 0.3 = 2.4, B_{12} = 4 \cdot 0.24 = 0.96, B_{13} = 1 \cdot 0.05 = 0.05.$$

2) Определение вероятности поражения, наносимого одним ТОСом каждой из групповых целей по формуле

$$\omega_i = \frac{\Delta N_{2i}}{N_{2i}} = 1 - \left(1 - \frac{P_{1i}}{N_{2i}}\right)^{n_i},$$

где ω_i - вероятность поражения, наносимого одним ТОСом каждой из групповых целей; P_{1i} - вероятность поражения одним ТОСом единичной цели; N_{2i} - количество единичных целей в группе; n_i - количество залпов на одном ТОСе,

$$\omega_1 = 1 - \left(1 - \frac{0.34}{20}\right)^3 = 0.0501, \omega_2 = 1 - \left(1 - \frac{0.42}{40}\right)^3 = 0.0312, \omega_3 = 1 - \left(1 - \frac{0.54}{60}\right)^3 = 0.0268.$$

Определение важности целей, выражаемых в единицах поражающего потенциала, по формуле

$$A_i = N_{2i} \cdot B_{1i},$$

где A_i - важность целей в единицах боевого потенциала; N_{2i} - количество единичных целей в группе; B_{1i} - поражающий потенциал единичных целей

$$A_1 = 20 \cdot 2.4 = 48, A_2 = 40 \cdot 0.96 = 38.4, A_3 = 60 \cdot 0.05 = 3.$$

3) Определение условных коэффициентов эффективностей по формуле

$$K_i = \ln(1 - \omega_i) = \ln \varepsilon_i,$$

где K_i - условный коэффициент эффективности применения вертолетов; ω_i - вероятность поражения, наносимого одним ТОСом каждой из групповых целей,

$$K_1 = |\ln(1 - 0.0501)| = 0.0514, K_2 = |\ln(1 - 0.0312)| = 0.0317,$$

$$K_3 = |\ln(1 - 0.0268)| = 0.0272.$$

5) Определение обобщенных важностей целей по формуле

$$B_{2i} = A_i \cdot P_{2i} \cdot K_i,$$

где B_{2i} - обобщенная важность групповых целей; A_i - важность целей в единицах боевого потенциала; K_i - условный коэффициент эффективности применения вертолетов; P_{2i} - вероятность преодоления ПВО единичной цели.

$$B_{21} = 48 \cdot 0.7 \cdot 0.0514 = 1.727, B_{22} = 38.4 \cdot 0.76 \cdot 0.0317 = 0.925,$$

$$B_{23} = 3 \cdot 0.79 \cdot 0.0272 = 0.645.$$

Определение оптимального наряда ТОСов по автоколонне по формуле

$$x_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^s \frac{P_{2i} K_i}{P_{2i} K_i}} \left(N_1 + \sum_{i=1}^s \frac{1}{P_{2i} K_i} \ln \frac{B_{2i}}{B_{21}} \right),$$

где P_{2i} - вероятность преодоления ПВО единичной цели; K_i - условный коэффициент эффективности применения ТОСов; B_{2i} - обобщенная важность групповых целей.

7) Определение оптимального наряда ТОСов по легкобронированной технике и пехоте по формуле

$$x_i = \frac{P_{2i} K_i}{P_{2i} K_i} \left(X_1 - \frac{1}{P_{2i} K_i} \ln \frac{B_{2i}}{B_{21}} \right),$$

где P_{2i} - вероятность преодоления ПВО единичной цели; K_i - условный коэффициент эффективности применения вертолетов; B_{2i} - обобщенная важность групповых целей.

8) Определение оптимального решения задачи.

Оптимальное решение задачи представляет собой вектор

$$X_0 \approx (x_1; x_2; x_3).$$

При таком использовании ТОСов величина ущерба наносимого объектам максимальна и её можно вычислить. Вычисления не приводятся из-за громоздкости.

Некоторым недостатком аналитической модели является определение искомых переменных не в целочисленной форме. Для перехода к целочисленному ответу необходимо выполнить округление до ближайшего целого числа. В отдельных задачах одна, а может и несколько переменных, могут получаться отрицательными. В этом случае такой переменной или переменным приписываются нулевые значения и выполняются повторные вычисления по сокращенной на это число системе формул (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журко М.Д.* Математические методы и основы их применения в управлении войсками: Курс лекций / Воен. Краснознам. акад. бронетанковых войск им. Маршала Советского Союза Малиновского Р. Я. Кафедра № 30. М., 1970. 165 с.
2. *Иванов П.И.* Применение методов прикладной математики в военном деле / Военно-Воздушная академия. Монино, 1991. 512 с.
3. *Малявко К.Ф.* Применение математических методов в военном деле: Учеб. пособие / Воен. акад. бронетанковых войск им. Маршала Сов. Союза Малиновского Р. Я. Кафедра высш. математики. М., 1975. 145 с.

УДК 519.6

Е. Ф. Скурыгин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: skouryguine@rambler.ru

ОБ УПАКОВКЕ ПОТОКА СО СЛУЧАЙНЫМИ МАССАМИ В КОНТЕЙНЕРЫ

Рассматривается алгоритм упаковки в контейнеры входного потока со случайными массами. Показаны результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: алгоритм, упаковка в контейнеры, численный эксперимент.

E. F. Skouryguin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: skouryguine@rambler.ru

ON THE PACKAGING OF STREAM WITH RANDOM MASSES INTO CONTAINERS

We consider the algorithm of packaging input stream with random masses into containers. The results of numerical experiment are presented.

Keywords: algorithm, packaging containers, numerical experiment.

Задача упаковки в контейнеры является широко известной в исследовании операций и имеет много практических приложений [1, 2]. В настоящей работе изучается случай упаковки в контейнеры потока со случайными массами.

Постановка задачи. Требуется упаковать входящий поток со случайными массами в контейнеры так, чтобы сумма масс в каждом контейнере попадала в заданный диапазон. Пусть X_i , $i = 1..n$ – массы элементов входящего потока. Значения X_i представляют собой случайные величины, принимающие значения в диапазоне

$$X \min \leq X_k \leq X \max, \quad k=1..n. \quad (1)$$

A_k , $k=1..m$ – ячейки. Последовательно каждый i элемент потока направляется в ячейку A_k . Как только ячейка заполняется, ее содержимое направляется в контейнер. Масса ячейки равна

$$M_k = \sum_{i(k)} X_{i(k)},$$

где $i(k)$ – массы элементов входящего потока, направленные в ячейку A_k . Ячейка считается заполненной, если ее масса удовлетворяет следующему условию:

$$M_l \leq M_k \leq M_h, \quad (2)$$

где M_l , M_h – нижний и верхний пределы допустимых масс упаковки. Требуется направить каждый i элемент потока в ячейку $A_{i(k)}$ так, чтобы контейнеры упаковывались по формуле (2).

Описание метода. Вычисляем следующую характеристику

$$n_A = \left\lceil \frac{M_A}{m(X)} \right\rceil, \quad M_A = \frac{1}{2}(M_l + M_h),$$

где M_A – средняя масса упаковки; $m(X)$ – среднее значение массы элемента в потоке.

Всю совокупность ячеек с номерами $i=1, \dots, m$ разделим на основные ($i=1, \dots, m - m_0$) и специальные $i=m - m_0 + 1, \dots, m$. В основные будем укладывать по n_A элементов, в специальные – по $n_A + 1$. Укладку будем производить следующим образом. Для основной ячейки выделим четыре уровня масс h_1, h_2, h_3, h_4 таким образом, чтобы при массе $h_1 \leq M_k < h_2$ можно было уложить два элемента из потока, а при массе $h_3 \leq M_k < h_4$ – только один элемент. Элементы укладываются в текущую ячейку таким образом, чтобы суммарная масса в ней проходила через интервалы (h_1, h_2) и (h_3, h_4) . Если текущий элемент не позволяет массе ячейки укладываться в указанные интервалы, он направляется в следующую ячейку. Если масса ячейки попадает в интервал (h_3, h_4) , то из потока берется элемент такой, чтобы при его добавлении масса ячейки удовлетворяла формуле (2).

Для специальных ячеек вводится ограничение на максимальную массу элементов ($X_k \leq x_0$), а алгоритм упаковки аналогичен.

Если все ячейки частично заполнены, т.е. их массы меньше M_1 , но текущий элемент нельзя уложить ни в один из контейнеров, то происходит сброс, т.е. все контейнеры освобождаются, а находившиеся в них элементы повторно направляются в поток.

Будем считать упаковку оптимальной, если все элементы потока попадают в контейнеры за минимальное число повторных проходов.

Оптимальные значения параметров m_0, x_0 определяются путем численного эксперимента. Входной поток формируется следующим обра-

зом. Задается последовательность нормально распределенных случайных величин с заданными математическим ожиданием и стандартным отклонением, из последовательности выбираются элементы, удовлетворяющие условию (1).

Численный эксперимент показал: если средняя масса контейнера кратна средней массе элементов потока, специальные ячейки не нужны ($m_0 = 0$). При средней массе потока, $m(X) = 10$ и стандартном отклонении $\sigma(X) = 10$, последовательность из $n = 1000$ элементов укладывается в контейнеры с допустимым диапазоном масс 388–412 при $m = 50$ ячеек без повторных проходов. В случае потока с параметрами $m(X) = 85$, $\sigma(X) = 10$, для упаковки в контейнеры с тем же допустимым диапазоном масс из 50 ячеек нужно выделить специальные с оптимальными параметрами, $m_0 = 15$, $x_0 = 90$. Для последовательности из 1000 элементов требуется в среднем 200 повторных проходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочетов Ю. А. Исследование операций [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.math.nsc.ru/LBRT/k5/or_mmf.html.
2. Coffman E.G. Approximation algorithms for bin packing: A survey [Электронный ресурс] / E.G. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson. Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/bp-chapter.pdf>

УДК 621.929.6:531.3

М. Ю. Гаршис, Л. В. Королёв, А. Б. Капранова

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: mutarshis@yahoo.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СМЕШИВАНИЯ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ В УСТРОЙСТВАХ ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ТИПА

Рассматриваются две математические модели процесса смешивания сыпучих материалов в устройствах циркуляционного типа, основанные на использовании теории марковских процессов. Диффузионная модель учитывает доминирующий механизм процесса. Ячеечная модель рассматривает вероятности переноса частиц компонентов из ячеек - в соседние.

Ключевые слова: сыпучие материалы, процесс смешивания, математическая модель, диффузия, ячейка, концентрация.

M. Yu. Tarshis, L. V. Korolev, A.B. Kapranova

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: mutarshis@yahoo.com

THE MODELING OF A GRAIN MATERIALS MIXING PROCESS IN THE CIRCULATING TYPE DEVICES

Two mathematical models of the grain materials mixing process in the circulating type device, based on using of the markovian processes theory, are considered. Diffusion model takes into account the dominant mechanism of process. The cells model considers probabilities of particles transition of components from cells – in the next.

Keywords: Grain materials, mixing process, mathematical model, diffusion, cell, concentration.

Для создания эффективных смесительных устройств циркуляционного типа, обеспечивающих получение качественных сыпучих составов, необходима разработка надежных методов их проектирования, которые в свою очередь должны опираться на адекватные математические модели процесса. Одним из наиболее эффективных методов моделирования процесса смешивания является системно-структурный анализ [1]. В соответствии с этим методом этапу выбора метода математического моделирования физико-механической системы предшествуют качественные, в том числе экспериментальные исследования механизмов процессов, происходящих в ней. Такие исследования устанавливают в поперечном сечении циркуляционного смесителя две области характерного поведения сыпучего материала: 1 - верхнюю область (активного смешивания), в которой наблюдается хаотическое движение частиц и проскальзывание слоев сыпучего материала, и 2 – область, прилегающую к рабочей поверхности, в которой отсутствует относительное движение слоев и частиц. Известно, что при смешивании сыпучих материалов реализуются диффузионные и конвективные механизмы [2]. Будем считать, что степень соответствия механизма изучаемого процесса диффузионному будет определяться величиной отклонения экспериментальной кривой смешивания от аппроксимирующей её экспоненты $V_c^i = V_0 + Ae^{-N/B}$, где N – число оборотов рабочей камеры, A , B , V_0 – постоянные величины. При аппроксимации кривых экспонентами минимизируется сумма квадратов отклонений экспериментальных значений критерия однородности от теоретических:

$Q = \sum_{i=1}^n (V_{ci}^o - V_{ci}^T)^2$. На основании расчета корреляционного критерия досто-

верности аппроксимации R^2 [3] можно судить о силе корреляционной связи между исследуемыми переменными и о степени соответствия изучаемых механизмов процесса - диффузионному. Значения упомянутого критерия для исследуемых устройств циркуляционного типа лежат в пределах 0.78-0.99 [4]. Таким образом, по результатам исследований можно сделать вывод о доминировании в рабочем объеме циркуляционного смесителя без внутренних устройств диффузионных механизмов смешивания. Конвективные механизмы присутствуют в течение первых нескольких секунд работы устройства. Будем рассматривать смесители с постоянным профилем и - с изменяемой формой рабочей поверхности [5].

При моделировании процесса смешивания сыпучего материала в устройствах с постоянным профилем рабочей поверхности механизм диффузионного смешивания на уровне микрообъемов можно моделировать случайным блужданием частиц ключевого компонента на отрезке линии обрушения сыпучего материала. Этот процесс может быть описан кинетическим уравнением типа Фоккера-Планка в изотропном приближении и без учета эффектов сноса

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \langle D \rangle \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальным условием

$$c(x, 0) = c_0, \quad x_p \leq x \leq l; \quad c(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_p, \quad (2)$$

где величина x_p определяется выражением $x_p/l_0 = Q_2/(Q_1+Q_2) = M_2/(M_1+M_2)$, а l - половина длины границы областей характерного поведения компонентов.

Система граничных условий и условие материального баланса

$$\frac{\partial c(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial c(l, t)}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\int_0^l c(x, t) dx = M_1. \quad (4)$$

Общее решение на оси $x \in]-\infty; +\infty[$ представлено как функция комплексов x_1 и x_2 . За критерий качества смеси принят коэффициент неоднородности:

$$V_c(y_1) = 100 \left\{ \Phi^2(y_1) - \Phi(y_1\sqrt{2}) / (y_1\sqrt{\pi}) + (\sqrt{2/\pi}\Phi(y_1)/y_1) \exp(-y_1^2/2) \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

где $y_1 = x_1 / \sqrt{x_2} = lx_1 / \sqrt{2} < D > t$. (6)

Решение уравнения (5) осуществлялось с помощью пакета MAPLE 8. Полученная кривая смешивания (5) аппроксимирована в интервале $1/y_1 = [1 \div 15]$ с помощью экспонент первого и второго порядков, а также полинома пятой степени. Затем осуществлялась минимизация среднего квадратического отклонения точек кривых от точек кривой смешивания с помощью пакета программных средств Origin Pro 7.0. Значения средне-квадратического отклонения точек экспоненты второго порядка – 0.023, первого порядка – 1.05, полинома – 1.345, что статистически подтверждает адекватность модели (1).

На этапе идентификации кривой смешения с опытными данными комплексы, входящие в (6), представлялись в соответствии с их физическим смыслом:

$$x_1 = Q_1 / (Q_1 + Q_2); \quad x_2 = \langle D \rangle t_{np} / l^2, \quad (7)$$

где t_{np} - время пребывания материала в смесителе.

При установлении структуры среднестатистического коэффициента макродиффузии $\langle D \rangle$ используется известное представление статистической теории взаимодействия дисперсных систем [5]

$$\langle D \rangle = D_0 \langle (u')^2 \tau_p \rangle, \quad (8)$$

где u' - хаотическая скорость частиц ключевого компонента; τ_p - характерное время взаимодействия частиц ключевого и транспортирующего компонентов. Для установления структуры коэффициента D_0 исследуемая система моделировалась с помощью формализма “перемешивающего бильярда”, в соответствии с которым её динамические характеристики определяются отношением времен пребывания пробных частиц в “фокусирующих” и “рассеивающих” частях бильярда. Для рассматриваемой системы “фокусирующая” часть моделирует зону активного смешения, а “рассеивающая” – транспортирующую.

Время пребывания частиц в зоне активного смешивания τ_1 пропорционально её средней толщине S_1/l , соотношению плотностей компонентов $(\rho_1/\rho_2)^n$, обратно пропорционально средней хаотической скорости частиц. Время пребывания частиц в транспортирующей зоне τ_2 пропорционально площади её поперечного сечения S_2 . Учитывая асимптотику качества смеси $\lim_{d_1/d_2, \rho_1/\rho_2 \rightarrow 1} V_c = 0$, пропорциональность t_{np} произведению числа возможных объединений частиц ключевого и транспортирующего компонентов, степени “подвижности” смеси и числа ячеек m , получаем:

$$1/y_1 = \frac{D_0 S_{\min}}{l(d_1 + d_2)c_m S} \left(2 + \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1,5} \sqrt{\frac{D_0 S_{\min} m}{\pi(1 - (d_1/d_2)(\rho_1/\rho_2))}}, \quad (9)$$

где c_m - концентрация компонента составляющего большую часть смеси.

Коэффициент $D_0/\pi = 1.32 \cdot 10^4$ установлен при идентификации уравнений (5) и (9) с опытными данными в области их варьирования.

При моделировании процесса смешивания сыпучего материала в устройствах циркуляционного действия без внутренних устройств с изменяемой формой рабочей камеры, как и в первом случае, в кинетическом уравнении процесса смешения типа (1), начальные условия для кинетического уравнения, система граничных условий и материального баланса записываются в виде (2), (3) и (4), но $l = l(t)$ - половина длины общей границы областей 1 и 2 зависит от времени. Поэтому кинетическое уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D_{o2} \frac{\partial^2 c}{\partial \tilde{x}^2}, \quad (10)$$

где $\tilde{x} = (x - x_o(t))/(x_2(t) - x_o(t))$ - безразмерная координата, $x_o(t), x_2(t)$ - координаты центра циркуляции и верхней точки пересечения линии обрушения с контуром рабочей поверхности, а величина

$$\tau = (u/S_o^n) \int_0^t (x_2(t) - x_o(t))^{2n-1} dt. \quad (11)$$

Решение уравнения (10) оказывается аналогичным (5):

$$V_c(y_2) = 100 \left\{ \Phi^2(y_2) - \Phi(y_2 \sqrt{2}) / (y_2 \sqrt{\pi}) + (\sqrt{2/\pi} \Phi(y_2) / y_2) \exp(-y_2^2/2) \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

где $y_2 = c_m / \sqrt{2D_{o2}\tau}$; c_m - концентрация фракции, составляющей большую долю.

В выражении (11) $n = 0,55$ - коэффициент, характеризующий влияние соотношения площадей областей характерного поведения на время пребывания в них частицы ключевого компонента, устанавливается при идентификации (12) относительно опытных данных. Структура D_{o2} также установлена на основе статистической теории взаимодействия дисперсных систем:

$$D_{o2} = D_0' \frac{4S_0}{\pi(d_1 + d_2)^2} \cdot \frac{(\rho_1/\rho_2)^{2,25(b/a)}}{1 - (d_1/d_2)(\rho_1/\rho_2)}. \quad (13)$$

В последние годы при описании процессов смешивания сыпучих материалов всё большее применение находит численное моделирование [5, 6]. Особенно удобным численное моделирование представляется при

описании процессов смешивания в циркуляционных смесителях. Здесь смешивание происходит наиболее активно в тонком слое материала (области 1), в котором присутствует случайный переход частиц компонентов в соседний слой. Данный механизм может быть описан с использованием теории марковских процессов, например, в [7]. В этом случае основной объем смеси, заполняющей нижнюю часть рабочей камеры, двигается синхронно с рабочей поверхностью без перемешивания, и только в верхнем слое материала, скатывающегося под углом обрушения вниз по поверхности слоя, имеет место хаотическое движение и перераспределение частиц разных фракций [4, 5].

Рассмотрим случай моделирования процесса, когда слой активного смешивания моделируется в виде линейки ячеек идеального смешивания с возможностью перехода материала в нижние слои [8].

Для удобства описания процесса, происходящего в поперечном сечении сыпучего материала, находящегося внутри цилиндрического барабана, воспользуемся цилиндрической системой координат $(O r \varphi)$. Сечение материала «разбивается» радиальными линиями, проходящими через центр цилиндра O с шагом $\Delta\varphi$, и дугами концентричных окружностей с центром O на ячейки равной площади (рис. 1).

Координата i -той ячейки в цилиндрической системе

$$r_i = R\sqrt{i/n}, \quad (14)$$

где R - радиус цилиндра (барабана); i - номер ячейки по координате r ; n - количество ячеек на радиусе R .

Фактором, определяющим вероятность ν нахождения ключевого компонента в конкретной ячейке смесителя для цилиндрической системы координат, является угловая скорость [9]:

$$\nu = \frac{\omega\Delta t}{\Delta\varphi}, \quad (15)$$

где ω - угловая скорость барабана; Δt - шаг по времени.

Пусть c_{ij}^t - концентрация ключевого компонента в ячейке нижней области с номером ij (по радиусу и угловому шагу соответственно), в момент времени t . Концентрация ключевого компонента, через интервал времени Δt :

$$c_{ij}^{t+\Delta t} = (1-\nu)c_{ij}^t. \quad (16)$$

Концентрация ключевого компонента в соседней ячейке

$$c_{ij}^{t+\Delta t} = \nu_{j+1} \cdot c_{ij+1}^t. \quad (17)$$

Суммируя слагаемые по сечению, получим концентрацию ключевого компонента в произвольной ячейке транспортного слоя в момент $t + \Delta t$:

$$c_{ij}^{t+\Delta t} = (1-\nu) \cdot c_{ij}^t + \nu_{ij+1} \cdot c_{ij+1}^t. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь область активного смешивания (рис. 2).

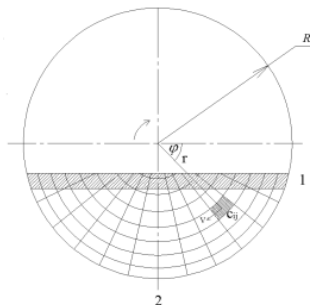


Рис. 1. Расчетная схема смесителя

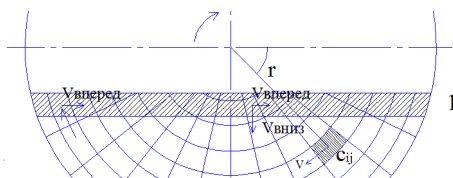


Рис. 2. Область активного смешивания

Для упрощения свободную поверхность области активного смешивания будем считать прямолинейной, но соответственно изменим скорость движения частиц по ней. В результате, в области обрушения будет справедливо выражение

$$V_{вперед}^{i+1 j} = V_{вперед}^i j \pm \omega r, \quad (19)$$

где $V_{вперед}^{ij}$ - скорость частиц вдоль линии обрушения; i - координата слоя по R , знак «+» берется в левой (верхней) части области, в которую материал попадает из транспортирующей области, а знак «-» - в правой (нижней), из которой материал уходит в транспортирующую область. Распределение скоростей частиц сыпучих компонентов вдоль линии обрушения имеет параболический вид. В нижней части слоя смешивания - 1 у частиц материала появляется вероятностный выбор - перехода вдоль линии обрушения, или - в транспортирующую область. Вероятность перехода материала в нижний слой

$$\nu_{вниз} = \frac{\nu_1}{\nu_1 c_1 + \nu_2 (1 - c_1)} \cdot \frac{\omega \Delta t}{\Delta \phi}, \quad (20)$$

где ν_1 - вероятность перехода ключевого компонента; ν_2 - вероятность перехода несущего компонента; c_1 - концентрация ключевого компонента в ячейках транспортирующей области, непосредственно прилегающей к области обрушения.

Такой вид записи вероятности перехода (20) обеспечивает выполнение закона сохранения удельного объема ключевого компонента, поскольку знаменатель первого множителя определяет массу компонентов в ячейке, а числитель – массу ключевого компонента в ней.

Условие выполнения материального баланса в верхней части области обрушения запишется в виде

$$c_{i,j}^{t+\Delta t} = c_{i-1,j}^t V_{\text{вперед}}^{i-1,j} \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} + v c_{i,j-1}^t + c_{i,j}^t (1 - V_{\text{вперед}}^{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta \varphi}), \quad (21)$$

а в нижней части области обрушения

$$c_{i,j}^{t+\Delta t} = c_{i-1,j}^t V_{\text{вперед}}^{i-1,j} \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} + c_{i,j}^t (1 - V_{\text{вперед}}^{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} - V_{\text{вниз}}). \quad (22)$$

Величина потока $v_{\text{вниз}}$ определяется отношением v_1/v_2 , которое может быть записано в виде

$$\frac{v_1}{v_2} = \exp \left(-k_d \left(\frac{d_1}{d} + \frac{d_2}{d} \right) - k_\rho \left(\frac{\rho}{\rho_1} - \frac{\rho}{\rho_2} \right) \right), \quad (23)$$

где d_1 , ρ_1 и d_2 , ρ_2 - соответственно диаметры и плотности частиц ключевого и несущего компонентов; $d = c_1 d_1 + (1 - c_1) d_2$, $\rho = c_1 \rho_1 + (1 - c_1) \rho_2$ - средний диаметр и плотность компонентов в приповерхностных ячейках транспортирующей зоны; k_d и k_ρ - числовые коэффициенты.

Если частицы ключевого и транспортирующего компонентов идентичны, то $v_1/v_2 = 1$, что обеспечивает быстрое смешивание, если же компоненты различаются по физико-механическим свойствам, то $v_1/v_2 \neq 1$, что соответствует их сегрегации. Таким образом, данная модель процесса смешивания сыпучих материалов рассматривает только конвективный перенос вещества (без учета диффузии) и может быть использована при описании перемешивания, в том числе компонентов, различающихся по физико-механическим свойствам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кафаров В.В. Системный анализ процессов химической технологии. Процессы измельчения и смешивания сыпучих материалов / В.В. Кафаров, И.Н. Дорохов, С.Ю. Арутюнов. М., 1985. 440 с.
2. Макаров Ю. И. Аппараты для смешения сыпучих материалов. М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
3. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. М.: Финансы и статистика, 1986. 369с.

4. Волков М.В. Исследование смесителя сыпучих материалов открытого типа с лопастями / М.В. Волков, М.Ю. Таршис, А.И. Зайцев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2013. Т.56, вып. 11. С. 117-119.
5. Таршис М.Ю. Теория и принципы моделирования процесса смешивания сыпучих материалов и создания устройств с гибкими элементами для его реализации/ М.Ю. Таршис, Л.В. Королев, А.И. Зайцев: монография. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2011. 100 с.
6. Першин В.Ф. Переработка сыпучих материалов в машинах барабанного типа/ В.Ф Першин, В.Г. Однолюкко, С.В. Першина. М.: Машиностроение, 2009. 220 с.
7. Prigozhin L. Radial mixing and segregation of a binary mixture in a rotating drum: Model and experiment / L. Prigozhin, H. Kalman // Phys. Rev. E 57. 1998. P. 2073–2080.
8. Волков М.В. Модель смешивания сыпучего материала в устройстве гравитационно-пересыпного действия/М.В. Волков, М.Ю. Таршис // 67–я Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов с межд. участием : тез. докл. Ярославль, 2014. С.240.
9. Баранцева Е.А. Процессы смешивания сыпучих материалов: моделирование, оптимизация, расчет / Е.А. Баранцева, В.Е. Мизонов, Ю.В. Хохлова. Иваново: Ивановский гос. энергет. ун-т им. Ленина, 2008. 116 с.

УДК 532.59

А. А. Ширяев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: aashiryaev@list.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ СТЕРЖНЯ

Рассматриваются осцилляции поверхности заряженной капли в электростатическом поле длинного стержня, поддерживаемого при постоянном потенциале. Оценивается влияние толщины стержня на устойчивость поверхности капли и характеристики амплитуд мод осцилляций.

Ключевые слова: заряженная капля, неустойчивость осцилляций, поле заряженного стержня, внешнее электростатическое поле.

A. A. Shiryaev

*P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: aashiryaev@list.ru*

SURFACE OSCILLATIONS INSTABILITY OF A CHARGED DROP IN AN ELECTROSTATIC FIELD OF A ROD

The paper examines oscillations of a charged drop in an electrostatic field of a long charged rod being under constant potential. We evaluate the influence of the rod thickness on drop stability and oscillation modes.

Keywords: *charged drop, oscillations instability, field of a charged rod, external electrostatic field.*

В работе рассматривается капля радиуса R идеальной, идеально проводящей, несжимаемой жидкости плотностью ρ , с коэффициентом поверхностного натяжения σ , зарядом Q , помещённая в электрическое поле стержня, поддерживаемого при постоянном потенциале φ_0 . Центр масс капли располагается на расстоянии L от конца цилиндрического стержня длиной $2a$ и диаметром $2b$. Соотношения между характерными размерами определяются следующим образом: $b : R, L : R, a \gg R$.

Решение задачи проводится в сферической системе координат с началом отсчёта в центре масс капли и направлением $\theta = 0$ соответствующему направлению от стержня. Задача решается в приближении потенциального течения жидкости и обезразмеривается на характерные масштабы $R = \rho = \sigma = 1$. Рассматривается осесимметричная постановка, при значительном сокращении расчётов дающая незначительное снижение общности рассуждений.

Математически задача формулируется системой, состоящей из основных уравнений электрогидродинамики, граничных условий на электрический потенциал и вспомогательных интегральных условий сохранения заряда и объёма капли и неподвижности её центра масс. В обезразмеренном на характерные масштабы и скаляризованном виде задача записывается следующими уравнениями:

$$\Delta \psi = 0; \quad \Delta \Phi = 0$$

$$P = P_0 + P_{in} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2; \quad |\nabla \psi|_{r=0} < \infty; \quad r \gg 1: \Phi \rightarrow \text{const}$$

$$r = f(\theta, t): \quad P_0 + P_{in} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2 - P_{atm} + P_q = P_\sigma;$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) = 0;$$

$$\Phi = \text{const}; \quad P_q = \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi}; \quad P_\sigma = \text{div} \mathbf{n};$$

$$f(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t); \quad \mathbf{n} = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [f(\theta, t)] \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{f(\theta, t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{f(\theta, t)} \mathbf{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\mathbf{n}, \nabla \Phi \cdot \mathbf{r}^2 \right) \Big|_{r=f(\theta, t)} d\theta d\varphi = -4\pi Q.$$

Выписанную задачу будем решать в предположении малости волнового искажения поверхности капли: $|\xi(\theta, t)| = \min |r(\theta, t)|$ и, как следствие, малости скорости течения жидкости, вызванного колебаниями возмущённой поверхности, поэтому будем полагать, что $|\psi(r, \theta, t)| : |\xi(\theta, t)|$. Рассмотрение ограничим нулевым и первым порядками малости по амплитуде $\xi(\theta, t)$, представляя искомые величины в виде суммы компонент указанных порядков:

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}; \quad P_q = P_q^{(0)} + P_q^{(1)}; \quad P_\sigma = P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)};$$

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} \quad P_{in} = P_{in}^{(0)} + P_{in}^{(1)}.$$

Проводя процедуру линеаризации стандартными методами, получим задачу нулевого порядка для определения равновесной формы поверхности капли и задачу первого порядка для анализа её устойчивости.

Внешнее по отношению к капле поле с потенциалом Φ определяющее форму поверхности капли, является суперпозицией поля стержня Φ_r и поля Φ_d , создаваемого зарядом капли. Поле стержня моделируется полем вытянутого сфероида с потенциалом Φ_{sph} , для которого имеется аналитическое выражение, в выбранной системе координат записываемое выражением

$$\Phi_r = \Phi_{sph} = \frac{\varphi_0}{\text{Arcth} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \times$$

$$\times \text{Arcth} \sqrt{\frac{4(a^2 - b^2)}{\left(\sqrt{(r \cos \theta - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + r^2 \sin^2 \theta} + \sqrt{(r \cos \theta + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + r^2 \sin^2 \theta} \right)^2}}.$$

Для расчёта электростатического давления необходимо представить потенциал, его первую и вторую производные по радиусу на поверхности сферической капли в виде разложений по полиномам Лежандра $P_k(\cos \theta)$:

$$\Phi_r|_{r=1} = \sum_{k=0}^{k_m} F_k P_k(\cos \theta) \quad F_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^\pi \Phi_r|_{r=1} P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta;$$

$$\partial_r \Phi_r|_{r=1} = \sum_{k=0}^{k_m} S_k P_k(\cos \theta) \quad S_k = -\frac{2k+1}{2} \int_0^\pi \partial_r \Phi_r|_{r=1} P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta;$$

$$\partial_{r,r} \Phi_r|_{r=1} = \sum_{k=0}^{k_m} G_k P_k(\cos \theta) \quad G_k = -\frac{2k+1}{2} \int_0^\pi \partial_{r,r} \Phi_r|_{r=1} P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Ввиду сложности рассматриваемого потенциала отсутствуют возможность получить аналитические выражения коэффициентов F_k , S_k , и G_k , поэтому необходимо ограничиться численными оценками коэффициентов разложения и, как следствие, учётом конечного числа слагаемых в разложениях. Число слагаемых, необходимых для учёта, определяется величиной относительной ошибки δ отклонения величины конечного разложения от точного выражения на поверхности сферической капли.

Анализ угловой зависимости относительной погрешности показывает, что наибольшая ошибка возникает в особых точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Аналогичные результаты даёт и анализ относительных погрешностей производных потенциала. В качестве критерия точности разложения принимается максимальная по углу величина относительной ошибки.

Стоит отметить, что величина относительной ошибки δ зависит от величин a , b , L , однако сравнительный анализ показывает, что зависимость от геометрии задачи (в рассматриваемых пределах: $b : R$, $L : R$, $a \gg R$) значительно меньше, чем от числа учтённых слагаемых, поэтому вышеуказанными зависимостями можно пренебречь. Таким образом, требуя поддержания величины погрешности разложений на уровне $\delta_{\max} \leq 1\%$, получим необходимость учёта в разложении слагаемых до номера $k_m = 12$ включительно.

Равновесная форма капли и волновое возмущение поверхности представляются в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta), \quad \xi(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\cos \theta).$$

Разрешив краевые задачи на компоненты потенциала, получим выражение для потенциала в окрестности капли Φ в линейном по амплитудам мод осцилляций приближении:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{Q}{r} + \Phi_r - \sum_{k=0}^{k_m} F_k r^{-(k+1)} P_k(\cos \theta) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} Q a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} Q \alpha_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k ((k+1)F_k + S_k) \alpha_{n+m}(t) U_{k,n+m,n} \right) r^{-(n+1)} P_n(\mu) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=-k}^k Q a_k \alpha_{n+m}(t) (k+m+n) U_{k,n+m,n} r^{-(n+1)} P_n(\mu). \end{aligned}$$

Из баланса давлений определяется равновесная форма поверхности капли $r(\theta)$:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{2k_m} a_n P_n(\cos \theta);$$

$$a_n = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(n+2 - Q^2 / 4\pi)(n-1)}.$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{k_m} \sum_{m=-k}^k (S_k + (k+1)F_k) (S_{n+m} + (n+m+1)F_{n+m}) U_{m,n+m,n}.$$

Здесь $U_{a,b,c} = (C_{a,0}^{c,0} \quad b,0)^2$, где $C_{l_1,m_1}^{l_2,m_2}$ - коэффициенты Клебша-Гордана, а F_k и S_k - численные коэффициенты разложений, определённые выше. Используя полученные выражения для давлений $P_E^{(1)}$, $P^{(1)}$ и $P_\sigma^{(1)}$, из динамического граничного условия, воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения амплитуд $\alpha_n(t)$:

$$\ddot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m \in M} (H_m(n) \alpha_{n+m}(t) + J_m(n) \ddot{\alpha}_{n+m}(t)) = 0;$$

где ω_n - собственная частота колебаний моды с номером n ,
 $M = [-2k_m, -2k_m - 1, \dots, -1, +1, \dots, 2k_m - 1, 2k_m]$ - диапазон связанных мод.

Из условия вещественности собственных частот осцилляций получим значения критических значений потенциала стержня:

$$\begin{aligned} \varphi_{cr} = \varphi_0 \cdot \sqrt{\left(n(n-1) \left(n + 2 - \frac{Q^2}{4\pi} \right) \right)} / \left(\left(\sum_{k=2}^{2k_m} a_k \left(2k + 2k^2 + 3(-2 + n + n^2) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(4 - 3k - k^2 - 4n + 2kn \right) \frac{Q^2}{4\pi} \right) U_{k,n,n} + \left(1 - \frac{2}{n} + n + \frac{Q^2}{4\pi n} \right) Y_{k,n,n} \right) + \\ + \sum_{k=0}^{k_m} \sum_{m=-k}^k \sum_{l=|m|}^{k_m} \frac{S_k + F_k(k+1)}{4\pi} \left((l+1) F_l + S_l \right) (n+m+1) U_{l,n,n+m} U_{k,n+m,n} + \\ + \sum_{k=0}^{2k_m} \sum_{m=0}^{k_m} \sum_{l=-m}^m \frac{S_{k+l} + F_{k+l}(k+l+1)}{4\pi} \left(G_m - F_m(1+m)(2+m) \right) U_{m,k+l,k} U_{k,n,n} \Bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведены критические значения величины потенциала для стержней разной толщины, рассчитанные по формулам, приведённым выше. Величина заряда на капле соответствует половине критической величины собственного заряда $Q_{cr} = \sqrt{16\pi}$, при которой капля претерпевает неустойчивость по Рэлею. Построения показывают, что с увеличением толщины стержня b , при неизменной его длине a и расстоянии L до капли критические значения потенциала существенно снижаются. В проведённых ранее исследованиях получено, что критические значения убывают с ростом неоднородности поля. Оценка формы поля длинного стержня позволяет предположить, что снижение критических значений потенциала связано прежде всего с увеличением ёмкости стержня по мере увеличения его толщины. То есть для более толстого (и более ёмкого при постоянной длине) стержня необходимы меньшие значения потенциала, чтобы аккумулировать заряд, достаточный создания критического значения напряжённости в окрестности капли.

Проанализируем, как изменение толщины стержня влияет на характеристики амплитуд присоединённых мод. Ниже представлены временные зависимости амплитуды третьей моды осцилляций поверхности незаряженной (рис. 2) и заряженной (рис. 3) капли при изначально возбуждённой основной моде в полях стержней разной толщины, поддерживаемых при одинаковом потенциале φ_0 .

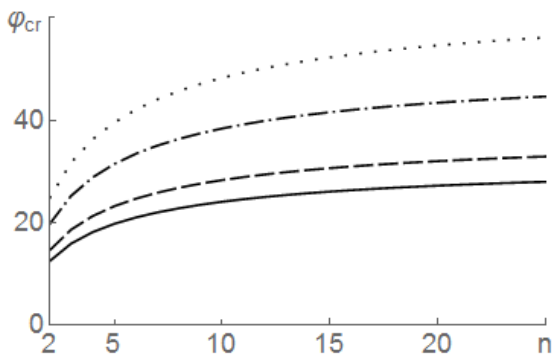


Рис. 1. Зависимости критических значений потенциала φ_{cr} от номера моды, рассчитанные при $a = 10$, $L = 2$, $k_m = 12$, $Q = \frac{Q_{cr}}{2}$.

Сплошная линия $b = 2$, пунктирная линия $b = 1$, штрихпунктирная $b = 0.3$, точечная $b = 0.1$

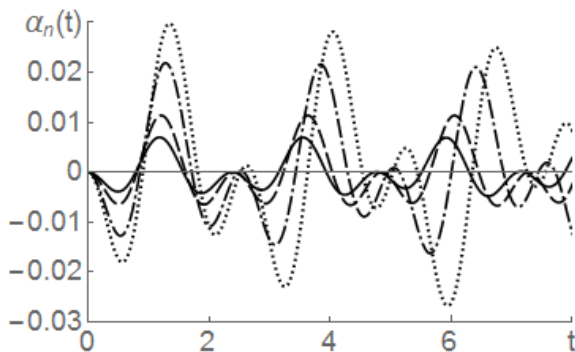


Рис. 2. Зависимости амплитуды присоединённой моды от времени, рассчитанные при $a = 10$, $L = 2$, $k_m = 12$, $Q = 0$, $\varphi_0 = 12$, $n = 3$ и изначально возбуждённой основной ($n = 2$) моде с амплитудой $\zeta = 0.1$.

Сплошная линия $b = 0.1$, пунктирная линия $b = 0.3$, штрихпунктирная $b = 1$, точечная $b = 2$

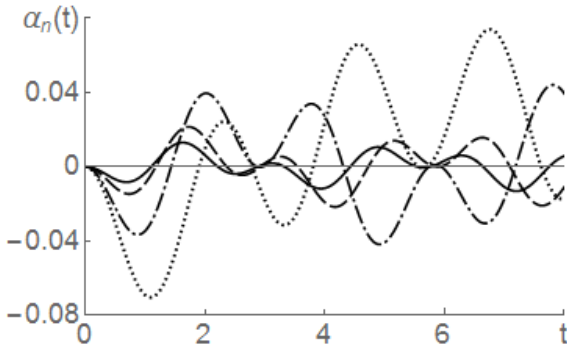


Рис. 3. Зависимости амплитуды присоединённой моды от времени,

рассчитанные при $a = 10$, $L = 2$, $k_m = 12$, $Q = \frac{Q_{cr}}{2}$, $\varphi_0 = 12$, $n = 3$

и изначально возбуждённой основной ($n = 2$) моде с амплитудой $\zeta = 0.1$.

Сплошная линия $b = 0.1$, пунктирная линия $b = 0.3$,

штрихпунктирная $b = 1$, точечная $b = 2$

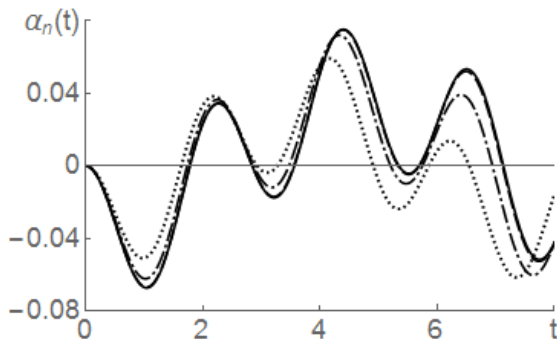
Из представленных зависимостей видно, что с ростом толщины стержня амплитуда и период осцилляций увеличиваются, и это влияние становится существеннее с увеличением величины собственного заряда на капле. Этот результат достаточно очевиден, если принять во внимание, что с ростом толщины длинного стержня существенно увеличивается его электрическая ёмкость. Следовательно, при одинаковом потенциале φ_0 более толстый стержень обладает большим зарядом и создаёт в месте расположения капли поле большей напряжённости. Рассмотрим влияние толщины стержня на амплитуды присоединённых мод при одинаковой величине поля в окрестности капли. Для этого введём в рассмотрение полевой параметр w , определяемый, как отношение электростатического давления внешнего поля P_E в точке центра масс капли к давлению капиллярных сил на поверхности сферической капли P_σ :

$$w = \frac{P_E}{P_\sigma} = \frac{\mathbf{E}_r^2}{8\pi} \frac{2\sigma}{R},$$

где \mathbf{E}_r - напряжённость внешнего поля в точке ц.м. капли.

Таким образом, внешние поля, генерирующие одинаковую напряжённость поля в точке центра масс капли характеризуются одинаковыми значениями полевого параметра w . На рис. 4 представлены временные за-

висимости амплитуды третьей моды осцилляций поверхности при изначально возбуждённой основной моде в полях стержней разной толщины, поддерживаемых при потенциалах, соответствующих одинаковым значениям полевого параметра w . Из рисунка видно, что изменение формы поля, вызванное увеличением толщины стержня приводит к противоположному по сравнению с рис. 3 эффектом – амплитуды и периоды осцилляций уменьшаются.



**Рис. 4. Зависимости амплитуды присоединённой моды от времени, рассчитанные при $a = 10$, $L = 2$, $k_{\max} = 12$, $Q = \frac{Q_{cr}}{2}$, $w_{cr} = 0.02$, $n = 3$ и изначально возбуждённой основной ($n = 2$) моде с амплитудой $\zeta = 0.1$.
Сплошная линия $b = 0.1$, пунктирная линия $b = 0.3$,
штрихпунктирная $b = 1$, точечная $b = 2$**

Таким образом, можно сделать вывод, что устойчивость осцилляций поверхности капли в поле длинного $a \gg b$ стержня, поддерживаемого при постоянном потенциале, существенно снижается с увеличением толщины стержня. Амплитуды и периоды присоединённых мод увеличиваются по мере увеличения толщины стержня. Характеристики осцилляций поверхности капли в полях длинных стержней различной толщины в основном определяются изменением величины заряда на конце стержня, а изменение формы поля с увеличением или уменьшением толщины стержня оказывает на них существенно меньшее влияние.

СПИСОКЛИТЕРАТУРЫ

1. Kim O.V. Control production by in-flight electro spraying / O.V. Kim, P.F. Dunn // Langmuir. 2010. V.26. P.15807-15813.

2. *Rayleigh (Strutt J.W.) On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V.14. P.184-186.*
3. *Ширяева С.О. О равновесных формах проводящей капли в однородном и неоднородных электростатических полях / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Ширяев // ЖТФ. 2013. Т.83, вып.11. С.44-51.*

УДК 532.59:517.956.227(075.8)

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, Д. А., Завьялов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, Ярославль, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ТРЁХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ С ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Получено и проанализировано дисперсионное уравнение для поверхностных и внутренних капиллярно-гравитационных волн в трехслойной жидкости со свободной поверхностью. Показано, что отношение амплитуд внутренних волн к поверхностным весьма велико. Отношение амплитуд внутренних волн между собой может быть как больше единицы, так и меньше в зависимости от физических параметров системы.

Ключевые слова: капиллярно-гравитационные волны, отношение амплитуд, бикубическое уравнение.

S. O. Shiryaev, A. I. Grigoriev, D. A. Zavyalov

Yaroslavl State University of P. G. Demidov
Russia, Yaroslavl, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

CAPILLARY-GRAVITY WAVES IN THREE-LAYER LIQUID WITH TWO INTERFACES

The dispersion equation for surface and internal capillary-gravitational waves in a three-layer liquid with a free surface is obtained and analyzed. It is shown that the relation of amplitudes of internal waves to surface is very large. The relation of amplitudes of internal waves among themselves can be both more and less than "1" depending on physical parameters of system.

Keywords: capillary-gravity waves, the amplitude ratio, bicubic equation.

Рассмотрим задачу об устойчивости в поле сил тяжести \vec{g} плоской границы раздела трех жидкостей, нижняя из которых, имеет бесконечную глубину, коэффициент поверхностного натяжения σ_3 и плотность ρ_3 ; средняя – толщину h_2 , коэффициент поверхностного натяжения σ_2 , плотность ρ_2 ; верхняя – толщину h_1 , коэффициент поверхностного натяжения σ_1 и плотность ρ_1 . Вектор ускорения свободного падения \vec{g} направлен противоположно \vec{e}_z - орту декартовой системы координат, координатная плоскость $z = 0$ которой совпадает с невозмущенной границей раздела нижней и средней жидкостей ($\vec{g} \parallel -\vec{e}_z$), \vec{n} - вектор нормали к поверхности. Будем считать, что все жидкости идеальны и несжимаемы. Задача рассматривается в декартовой системе координат, где ось OZ направлена вертикально вверх, ось OX направлена в направлении распространения волн.

Математическая формулировка задачи будет состоять из уравнения Эйлера и непрерывности [1]:

$$\operatorname{div} \vec{V}_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\partial_t \vec{V}_j + (\vec{V}_j \cdot \nabla) \vec{V}_j = -\frac{1}{\rho_j} \cdot \nabla \cdot P_j + \vec{g}, \quad (j = 1, 2, 3).$$

естественных, кинематических и динамических граничных условий [2]:

$$z \rightarrow -\infty : \vec{V}_3 \rightarrow 0;$$

$$z = \xi_3(x, t) : \vec{n} \cdot \vec{V}_3 = \vec{n} \cdot \vec{V}_2 = \vec{n} \cdot \vec{U}_3;$$

$$z = h_2 + \xi_2(x, t) : \vec{n} \cdot \vec{V}_2 = \vec{n} \cdot \vec{V}_1 = \vec{n} \cdot \vec{U}_2;$$

$$z = h_1 + h_2 + \xi_1(x, t) : \vec{n} \cdot \vec{V}_1 = \vec{n} \cdot \vec{U}_1;$$

$$P_1 - P_{atm} - P_{\sigma_1} = 0;$$

$$P_2 - P_1 - P_{\sigma_2} = 0;$$

$$P_3 - P_2 - P_{\sigma_3} = 0;$$

где P_j ($j = 1, 2, 3$) - гидродинамические давления в верхней, средней и нижней средах, соответственно; P_{σ_j} ($j = 1, 2, 3$) - давления сил поверхностного натяжения на j -тую поверхность раздела сред; P_{atm} - постоянное давление внешней среды, движением которой в данной постановке пренебрегается.

Проводя исследование волнового движения, порождаемого границами раздела в слоисто-неоднородной жидкости со свободной поверхностью, в линейном по амплитудам возмущений приближении, получим дисперсионное бикубическое уравнение относительно частоты ω :

$$\begin{aligned} & \omega^6 \rho_1 \left(\rho_1 (\operatorname{ch}(h_2 k) \rho_2 + \operatorname{sh}(h_2 k) \rho_3) \operatorname{sh}(h_1 k) + \right. \\ & \quad \left. + \rho_2 (\operatorname{sh}(h_2 k) \rho_2 + \operatorname{ch}(h_2 k) \rho_3) \operatorname{ch}(h_1 k) \right) - \\ & - \omega^4 k \left(\rho_2 \rho_3 (g \rho_1 + k^2 \sigma_1) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) + \right. \\ & \quad \left. + \rho_1 \rho_3 (g \rho_2 + k^2 (\sigma_1 + \sigma_2)) \operatorname{sh}(h_2 k) \operatorname{ch}(h_1 k) + \right. \\ & \quad \left. + (\rho_2 (g \rho_1 (\rho_2 - \rho_1) + k^2 \rho_2 \sigma_1) + \rho_1^2 (g \rho_3 + k^2 \sigma_3)) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) + \right. \\ & \quad \left. + \rho_1 \rho_2 (g \rho_3 + k^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) \operatorname{ch}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) \right) + \\ & + \omega^2 k^2 \left(\rho_2 (g \rho_1 + k^2 \sigma_1) (g (\rho_3 - \rho_1) + k^2 (\sigma_2 + \sigma_3)) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) + \right. \\ & \quad \left. + \rho_1 (g \rho_2 + k^2 (\sigma_1 + \sigma_2)) (g (\rho_3 - \rho_2) + k^2 \sigma_3) \operatorname{sh}(h_2 k) \operatorname{ch}(h_1 k) + \right. \\ & \quad \left. + \rho_3 (g \rho_1 + k^2 \sigma_1) (g (\rho_2 - \rho_1) + k^2 \sigma_2) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) \right) - \\ & - k^3 (g \rho_1 + k^2 \sigma_1) (g (\rho_2 - \rho_1) + k^2 \sigma_2) (g (\rho_3 - \rho_2) + k^2 \sigma_3) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) = 0. \end{aligned}$$

Решения этого уравнения соответствуют трём режимам колебательных движений в рассматриваемой системе: режим «однородной жидкости» и два режима «внутренних волн», существование которых возможно лишь в стратифицированной жидкости. В режиме «однородной жидкости» амплитуда волн убывает по мере углубления, поэтому волны на внутренних поверхностях раздела имеют меньшие амплитуды, чем волны на свободной поверхности. В режимах «внутренних волн», характерных для слоисто-неоднородных жидкостей, проявляется эффект «мертвой воды», когда амплитуда внутренних волн намного больше, чем на границе свободной поверхности. В ходе аналитического исследования данного эффекта показано, что он реализуется не только для гравитационных, но и для капиллярных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т.7. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. 733 с.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1973. 504 с.

УДК 534.1: 537.525.4

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, К. И. Орлова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

**О КОЛЬЦЕВЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ
ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ВО ВНЕШНЕМ
ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ
И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОБОЕ**

Выводится соотношение для связи частоты кольцевых капиллярно-гравитационных волн на поверхности проводящей жидкости во внешнем однородном электростатическом поле с физическими параметрами задачи и с аналогом волнового числа. Показано, что полученное соотношение имеет формально такой же вид как дисперсионное уравнение для плоских волн, однако в рассматриваемом случае волновое число в качестве характеристики кольцевых волн теряет свой смысл в силу неопределенности понятия длины волны. Рассмотрена возможность реализации электрического разряда с однородно заряженной во внешнем электростатическом поле поверхности жидкости при падении на нее капля той же жидкости.

Ключевые слова: *кольцевые волны, длина волны, внешнее однородное электростатическое поле, электрический разряд.*

S. O. Shiryaeva, A. I. Grigoriev, K. I. Orlova

*Yaroslavl State University of P. G. Demidov,
Russia, Yaroslavl, e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

**ABOUT RING WAVES ON THE SURFACE
OF THE CONDUCTING LIQUID IN UNIFORM
ELECTROSTATIC FIELD AND ELECTRICAL DISCHARGE**

It is derived the expression for connection of frequency of ring capillary and gravitational waves on a surfaces of the conducting-liquid in outside uniform electrostatic field with physical parameters and an analog of a wave number. It is shown that such expression has formally the same appearance as the dispersing equation for plane waves, but in the case under consideration the wave number as the characteristic of ring waves loses the meaning owing to uncertainty of a concept of wavelength. The possibility of realization of an electric discharge from the surface of liquid, charged in outside electrostatic field, when falling is considered of drops of the same liquid on it.

Keywords: *ring waves, wavelength, outside uniform electrostatic field, electric discharge.*

Пусть идеальная несжимаемая жидкость с массовой плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ заполняет в поле сил тяжести \vec{g} полубесконечное пространство. В верхнем полупространстве заполненном диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$ и пренебрежимо малой плотностью существует однородное электростатическое поле напряженностью \vec{E}_0 . Все рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, плоскость $z = 0$ которой совпадает с равновесной плоской поверхностью жидкости, а ось Oz направлена вертикально вверх коллинеарно ускорению силы тяжести \vec{g} , а жидкость занимает нижнее полупространство $z < 0$. Поверхность жидкости, возмущенной волновым движением, будем описывать уравнением $z = \zeta(r, \phi, t)$, где $\zeta(r, \phi, t)$ - вертикальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного положения $z = 0$. Поле скоростей волнового течения жидкости обозначим $\vec{V}(\vec{r}, t)$, а напряженность электрического поля у возмущенной волновым движением поверхности жидкости - $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Максимальное значение $|\zeta(r, \phi, t)|$ будем полагать малой величиной и рассмотрим задачу в линейном приближении по малому параметру - безразмерному значению величины $\varepsilon \equiv \max |\zeta(r, \phi, t)| / \beta$, где $\beta \equiv \sigma / \rho g$ - капиллярная постоянная жидкости.

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}, t) = 0; \quad \frac{\partial \vec{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{V}(\vec{r}, t), \nabla) \vec{V}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\vec{r}, t) + \vec{g};$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

с граничными условиями:

$$z \rightarrow \infty: \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{E}_0,$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \vec{V}(\vec{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r = 0: \quad \vec{E}(\vec{r}, t) < \infty; \quad V(\vec{r}, t) < \infty,$$

$$z = \zeta(r, \phi, t): \quad V(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \zeta(r, \phi, t)}{\partial t}.$$

$$P(\vec{r}, t) - P_{амм} + P_E(\vec{r}, t) = P_\sigma(\vec{r}, t);$$

где $P_{амм}$ - постоянное внешнее давление; $P(\vec{r}, t)$ - поле гидродинамического давления; $P_\sigma(\vec{r}, t) = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ - давление сил поверхностного натяжения; $P_E(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t)^2 / 8\pi$ - давление электростатического поля, $\vec{n}(\vec{r}, t)$ - вектор единичной нормали к возмущенной волновым движением поверхности жидкости.

Решая задачу стандартными методами в рамках модели потенциального течения, т.е. представляя поле скоростей и напряженность электрического поля через гидродинамический [1] и электрический потенциал соответственно [2]:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla \psi(\vec{r}, t), \quad E(\vec{r}, t) = -\nabla \Phi(\vec{r}, t),$$

получим решение в следующем виде:

$$\zeta(r, \phi, t) = \alpha(t) \cdot \exp(im\phi) \cdot J_m(kr);$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{\alpha'(t)}{k} \cdot \exp(im\phi) \cdot \exp(kz) \cdot J_m(kr);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = -E_0 z + E_0 \cdot \alpha(t) \cdot \exp(im\phi) \cdot \exp(-kz) \cdot J_m(kr).$$

Подставляя найденные решения в динамическое граничное условие, получим эволюционное уравнение для амплитуды $\alpha(t)$:

$$\alpha''(t) + \alpha(t) \left[gk - \frac{k}{4\pi} E_0^2 \frac{k}{\rho} - \frac{\sigma k}{\rho} \right] = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\alpha(t) = a \cdot \exp(i\omega t),$$

где частота ω определяется дисперсионным уравнением

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{E_0^2 k^2}{4\pi \rho}.$$

В этом выражении k имеет смысл константы разделения с размерностью « см^{-1} », а не волновое число, как в случае плоских волн. Поскольку понятие длины волны в классическом ее определении: как расстояние между двумя последовательными максимумами или минимумами, в случае кольцевых волн приводит к некорректности т.к. оно не постоянно, а уве-

личивается при удалении от начала координат, что приводит к некорректности в определении понятия волнового числа.

Таким образом, уравнение, связывающее частоту кольцевых волн с физическими параметрами системы, формально полностью совпадает с дисперсионным уравнением для плоских капиллярно-гравитационных волн, как при наличии внешнего однородного электрического поля, так и без него. Однако длина волны для кольцевых волн не является постоянной величиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. Т.7. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. 733 с.
2. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. Т.2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1973. 504 с

УДК 66.074.2

М. А. Юровская, В. К. Леонтьев, Д. Е. Смирнов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: barashevama@ystu.ru

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПЫЛЕУЛОВИТЕЛЕ-КЛАССИФИКАТОРЕ

При анализе движения частиц в пылеуловителе-классификаторе, когда скорость движения частиц больше критической предложено учитывать силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости. Для этого случая приведено математическое решение, позволяющее определить скорости движения и координаты расположения частиц во времени.

Ключевые слова: пылеуловитель-классификатор, эффективность пылеулавливания, скорость движения частиц, координаты расположения частицы во времени.

M. A. Yurovskaya, V. K. Leontiev, D. E. Smirnov

*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: barashevama@ystu.ru*

PARTICLE MOTION IN THE DUST COLLECTORS-CLASSIFIER

In the analysis of the motion of particles in the dust collector-classifier, when the rate of motion particles is larger than critical, we take into account the resistance force proportional to the square of the speed. For this case, was given the mathematical solution to determine the speed and location coordinates of the particles over time.

Keywords: *dust collector-classifier, dust collection efficiency, the speed of the particle, the particle location coordinates in time.*

Во многих отраслях промышленности при проведении технологических операций в отходящих газовых потоках образуется значительное количество мелкодисперсной пыли, непосредственный выброс которой пагубно влияет на окружающую среду. Также, часто возникает ситуация, когда выбрасываемая пыль является ценным продуктом производства (например, в процессах производства пигментов, цемента, керамзита, катализатора, доломита и топливных пеллет). Кроме этого на таких производствах необходимо не только высокоэффективно выделить пыль из газового потока, но и классифицировать её по фракциям.

В Ярославском государственном техническом университете на кафедре «Процессы и аппараты химической технологии» был разработан высокоэффективный пылеуловитель-классификатор, конструкция которого представлена на рис. 1.

Пылеуловитель-классификатор работает следующим образом. В корпусе пылеуловителя-классификатора размещены три ступени очистки газа. Запыленный газ через спиральный входной патрубок поступает на первую ступень очистки, где происходит отделение крупных частиц пыли, за счет сил возникающих во вращающемся потоке. Поток газа со средней и мелкой фракцией пыли поступает на вторую ступень очистки, где за счет сил инерции возникающих при изменении направления движения потока газа, частицы пыли средней фракции осаждаются и удаляются из аппарата. Поток газа с мелкой фракцией пыли поступает на третью ступень очистки газа, на которой за счет неподвижных лопастей увеличивается частота вращения пылегазового потока, следовательно, повышается действие центробежной силы при отделении мелкодисперсной пыли от газового потока. Очищенный газовый поток меняет направление движения и через выходной патрубок выводится из аппарата [1, 2].

Ранее было рассмотрено движение частиц в первой ступени пылеуловителя-классификатора, когда сила сопротивления пропорциональна скорости движения в первой ступени, т.е. $F_c = -\kappa_1 \cdot v$ [3]. Такое возможно если скорость движения частиц меньше критической скорости $v_{кр}$. В этом случае преобладает как раз сила сопротивления $F_c \sim v$.

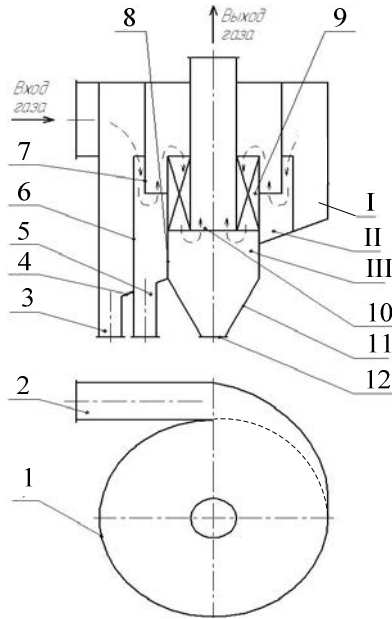


Рис. 1. Принципиальная схема пылеуловителя-классификатора:

- 1 – корпус аппарата; 2 – входной патрубок; 3 – патрубок отвода крупной фракции пыли; 4 – наклонное днище; 5 – патрубок отвода средней фракции пыли; 6 – приемный цилиндр второй ступени; 7 – экран цилиндрической формы; 8 – приемный цилиндр третьей ступени; 9 – неподвижные лопасти; 10 – выходной патрубок; 11 – наклонное днище; 12 – патрубок отвода мелкой фракции

Рассмотрим движение частиц (рис. 2), когда скорость движения больше критической ($v > v_{кр}$). В этом случае преобладающей является сила сопротивления пропорциональная квадрату скорости ($F_c = -\kappa v^2$).

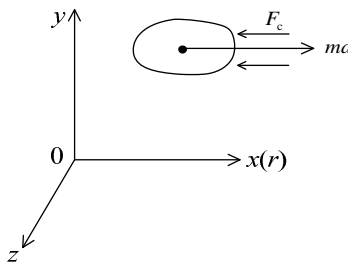


Рис. 2. Выбор системы координат

Выберем систему координат, в которой частица начинает движение из начала координат с вектором начальной скорости, направленным по оси x . Пусть $x(t)$ – x -координата частицы в момент времени t . Согласно закону Ньютона $ma = F_c$, где $a = \frac{dv}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$, а $F_c = -\kappa \cdot v$. Таким образом, для нахождения скорости $v = v(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$m \frac{dv}{dt} = -\kappa v^2.$$

Кроме того, имеем начальные условия: $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

Разделяем переменные

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\kappa}{m} dt,$$

и интегрируем

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{\kappa}{m} \int dt; \quad -\frac{1}{v} = -\frac{\kappa}{m} t + C. \quad (1)$$

Для нахождения константы интегрирования C используем начальное условие: $v = v_0$ при $t = 0$ и потому $-\frac{1}{v_0} = C$. Подставляя полученное выражение в уравнение (1), имеем $-\frac{1}{v} = -\frac{\kappa}{m} \cdot t - \frac{1}{v_0}$, откуда получим зависимость скорости движения частиц от времени (рис. 3)

$$v = \frac{1}{\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0}}. \quad (2)$$

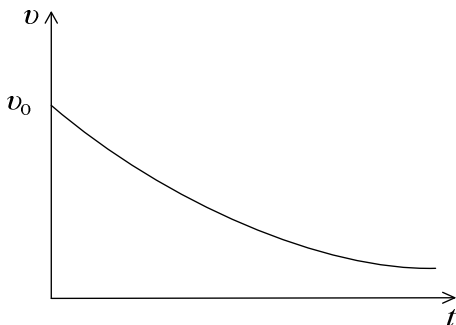


Рис. 3. Изменение скорости движения частиц во времени

Так как $v = \frac{dx}{dt}$, то из (2) получаем дифференциальное уравнение для координаты $x = x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0}},$$

откуда находим

$$x = \int \frac{dt}{\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0}}, \quad x = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0} \right) + C. \quad (3)$$

Используя начальное условие $x(0) = 0$, получаем

$$0 = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{1}{v_0} \right) + C; \quad C = -\frac{m}{k} \ln \left(\frac{1}{v_0} \right) = \frac{m}{k} \ln v_0.$$

Найденное выражение для C подставим в (3):

$$x = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0} \right) + \frac{m}{k} \ln v_0 = \frac{m}{k} \left(\ln \left(\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0} \right) + \ln v_0 \right) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{\kappa}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0} \right) v_0,$$

$$x = x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{\kappa v_0}{m} \cdot t + 1 \right).$$

Полученная функция $x(t)$ неограниченно растет во времени: $x(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (рис. 4). То есть сила сопротивления есть, а остановки нет.

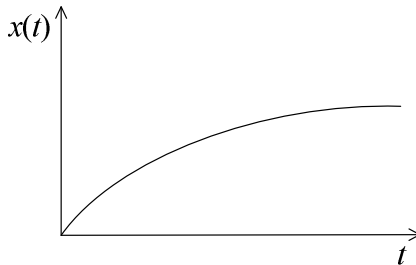


Рис. 4. Изменение координаты $x(t)$ частицы во времени

Данный подход анализа движения частиц в пылеуловителе является нетрадиционным. При этом частицы, войдя в камеру пылеуловителя-

классификатора, отправляются в «свободное движение». Не учитывается воздействие потока и других частиц на характер движения. Как показали экспериментальные исследования этот подход в некоторых случаях можно использовать для описания движения частиц в пылеуловителе-классификаторе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юровская М.А. Исследование эффективности пылеуловителя-классификатора / М.А. Юровская, А.Р. Гриценко, А.В. Сугак // Шестьдесят шестая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием: материалы конф., 23 апреля 2013 г. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. С. 161.
2. Юровская М.А. Экспериментальные исследования пылеуловителя-классификатора / М.А. Юровская, Д.Е. Смирнов, А.В. Сугак, В.К. Леонтьев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2014. Т. 57, № 10. С. 84-87.
3. Юровская М.А. Движение частиц в первой ступени пылеуловителя-классификатора / М.А. Юровская, В.К. Леонтьев, Д.Е. Смирнов // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 168-174.

УДК 532.59

Л. С. Яковлева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: dej dara@inbox.ru

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В теоретическом аналитическом исследовании линейной математической модели капиллярно-гравитационного периодического волнового движения в трехслойной слоисто-неоднородной жидкости, когда верхние два слоя имеют конечную толщину, а нижний бесконечно глубокий, выводится дисперсионное уравнение. Найдены аналитические выражения для отношений амплитуд внутренних волн между собой и по отношению к поверхностным. Показано, что отношения внутренних волн к поверхностным при малых различиях в плотностях контактирующих жидкостей могут быть весьма большими.

Ключевые слова: гравитационные волны, трехслойная жидкость, дисперсионное уравнение.

L. S. Yakovleva

P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: dejdara@inbox.ru

GRAVITATIONAL WAVES IN TWO-LAYER LIQUID WITH THE INITIAL CONDITIONS

Dispersion equation is derived in the theoretical analytical research of linear mathematical model of capillary-gravitational periodic wave motion in a three-layer heterogeneous liquid when the top two layers have a finite thickness and the bottom layer is infinitely deep. Analytical expressions have been found for the relations of internal wave amplitudes to each other and the relations of internal and surface wave amplitudes. It was shown that the relation of internal waves to the surface waves can be quite large with a small differences in densities of contacting liquids.

Keywords: Gravitational waves, three-layer liquid, dispersion equation.

В связи с возможностью реализации баро-, хемо-, тер- моклининой стратификации морской воды представляет интерес проблема исследования поверхностных и внутренних волн в многослойной жидкости. Это актуально и в применении к воздушным течениям.

Целью работы являлись рассмотрение особенностей колебательных движений в многослойной жидкости на основе анализа дисперсионного соотношения, а также изучение временной эволюции волновых возмущений границ раздела сред. В процессе работы проводились аналитическое решение задачи о гравитационных волнах в многослойной жидкости и численный анализ полученного решения. В результате исследования впервые получены дисперсионные уравнения для частот колебаний трехслойной жидкости. Проанализировано влияние толщины слоев и плотностей жидкостей на амплитуды внутренних волн, а так же влияние начальных условий на изменения форм поверхностей жидких слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечно глубокий слой жидкости плотностью ρ_3 , на котором находятся два жидких слоя толщиной h_2 , плотностью ρ_2 и толщиной h_1 , плотностью ρ_1 соответственно. Все жидкости предполагаются идеальными, несжимаемыми, несмешиваемыми. Система находится в поле сил тяжести \vec{g} . Введем декартову систему координат, орг \vec{n}_z которой направлен вертикально вверх ($\vec{n}_z \parallel -\vec{g}$), а плоскость $z = 0$ совпадает с границей раздела нижнего и среднего слоев. При таком введении декартовых координат средний слой занимает пространство $0 \leq z \leq h_2$, верхний - $h_2 \leq z \leq h_2 + h_1$, а нижний: $z \leq 0$.

Математическая формулировка задачи состоит из: уравнений непрерывности и уравнений Эйлера для трех сред [1,2]:

$$\operatorname{div} \vec{V}_j = 0; \quad j = (1, 2, 3); \quad \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + (\vec{V}_j \cdot \nabla) \vec{V}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j + \vec{g};$$

И граничных условий к ним:

$$F_1 = 0 \Leftrightarrow z = (h_1 + h_2) + \xi_1(x, t): \quad \frac{dF_1}{dt} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla F_1 \right) = 0;$$

$$F_2 = 0 \Leftrightarrow z = h_2 + \xi_2(x, t): \quad \frac{dF_2}{dt} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla F_2 \right) = 0; \quad \frac{dF_2}{dt} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} + \vec{V}_2 \cdot \nabla F_2 \right) = 0;$$

$$F_3 = 0 \Leftrightarrow z = \xi_3(x, t): \quad \frac{dF_3}{dt} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial t} + \vec{V}_2 \cdot \nabla F_3 \right) = 0; \quad \frac{dF_3}{dt} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial t} + \vec{V}_3 \cdot \nabla F_3 \right) = 0;$$

$$P_1 = P_0; \quad P_2 = P_1; \quad P_2 = P_3; \quad V_{1n} = V_{2n}; \quad V_{2n} = V_{3n}; \quad \vec{V}_3 \rightarrow 0; \quad (z \rightarrow -\infty);$$

здесь \vec{V}_j - скорости течения жидкостей; ρ_j - плотности жидкостей; P_j - гидродинамические давления; V_{jn} - нормальные компоненты скоростей.

Аналитическое решение задачи: В рамках модели потенциального течения жидкости поля скоростей представим в виде [3, 4]: $\vec{V}_j = \nabla \psi_j$ ($j = 1, 2, 3$), где ψ_j - гидродинамические потенциалы для трёх жидкостей, соответственно. Введение гидродинамических потенциалов позволяет преобразовать уравнения непрерывности и проинтегрировать уравнения Эйлера, а также преобразовать граничные условия. Поскольку движения всех жидкостей вызваны малыми колебаниями их поверхностей, то примем, что потенциалы ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 , а также все пространственные и временные производные до второго порядка включительно имеют тот же порядок малости, что и амплитуды волн:

$$|\psi_i|, |\partial_t \psi_i|, |\partial_x \psi_i|, |\partial_z \psi_i|, |\partial_{x,z} \psi_i|, \dots \sim |\xi_i|.$$

Рассматриваем полученную систему первого порядка малости: Запишем решения двумерных уравнений Лапласа в декартовой системе координат периодические по x и аperiodические по z :

$$\psi_j(x, t) = (C_{1,j} e^{ikx} + C_{2,j} e^{-ikx}) (D_{1,j} e^{kz} + D_{2,j} e^{-kz}), \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Для сокращения записи комплексно сопряженные слагаемые в (1) дальнейшем будем опускать. Заметим, что учет отброшенных комплексно сопряженных слагаемых привел бы к появлению волны, идентичной остав-

ленной, но бегущей в противоположном направлении. Учитывая это, а также используя естественное граничное условие для трех гидродинамических потенциалов, запишем следующие выражения:

$$\psi_1(x, z, t) = (D_1(t)e^{kz} + D_2(t)e^{-kz})e^{ikx};$$

$$\psi_2(x, z, t) = (D_3(t)e^{kz} + D_4(t)e^{-kz})e^{ikx}; \quad \psi_3(x, z, t) = D_5(t)e^{kz}e^{ikx};$$

$D_m(t)$ - неизвестные коэффициенты. Удовлетворяя граничным условиям, найдем связь между $D_m(t)$ и $A_j(t)$:

$$D_1(t) = \frac{e^{-k h_1} A_2'(t) - A_1'(t)}{k(e^{k(h_2-h_1)} - e^{k(h_1+h_2)})}; \quad D_2(t) = \frac{e^{k h_1} A_2'(t) - A_1'(t)}{k(e^{-k(h_1+h_2)} - e^{k(h_1-h_2)})};$$

$$D_3(t) = \frac{e^{-k h_2} A_3'(t) - A_2'(t)}{k(e^{-k h_2} - e^{k h_2})}; \quad D_4(t) = \frac{e^{k h_2} A_3'(t) - A_2'(t)}{k(e^{-k h_2} - e^{k h_2})};$$

$$D_5(t) = \frac{1}{k} A_3'(t),$$

где временную зависимость коэффициентов волновых решений естественно искать в виде гармонических функций времени. Поэтому будем искать её решение в виде гармонических функций времени

$$A_j(t) = \alpha_j e^{-i\omega t}.$$

Подставим полученные коэффициенты $D_m(t)$ в (1) и получим выражения для гидродинамических потенциалов $\psi_j(x, y, z)$, которые в свою очередь подставим в динамические граничные условия (на трех границах раздела). Получим систему трех алгебраических уравнений для нахождения трех неизвестных коэффициентов α_j

$$\alpha_2 \omega^2 - \alpha_1 (\omega^2 \cdot \text{ch}(kh_1) - gk \cdot \text{sh}(kh_1)) = 0;$$

$$\alpha_1 \omega^2 \rho_1 \text{sh}(kh_2) + \alpha_3 \omega^2 \rho_2 \text{sh}(kh_1) -$$

$$- \alpha_2 \left(\omega^2 (\rho_1 \text{ch}(kh_1) \cdot \text{sh}(kh_2) + \rho_2 \text{ch}(kh_2) \cdot \text{sh}(kh_1)) -$$

$$- gk(\rho_2 - \rho_1) \text{sh}(kh_1) \cdot \text{sh}(kh_2) \right) = 0;$$

$$\alpha_2 \omega^2 \rho_2 - \alpha_3 \left(\omega^2 (\rho_2 \text{ch}(kh_2) + \rho_3 \text{sh}(kh_2)) -$$

$$- gk(\rho_3 - \rho_2) \text{sh}(kh_2) \right) = 0.$$

Условие разрешимости системы — обращение в нуль определителя, составленного из ее коэффициентов, это и будет дисперсионное уравнение задачи. Раскрывая определитель, получим бикубическое относительно частоты ω дисперсионное уравнение, которое после упрощения примет вид:

$$(\omega^2 - gk)(a\omega^4 + b\omega^2 + c) = 0,$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \rho_2 (\rho_1 \operatorname{ch}(h_2 k) \cdot \operatorname{sh}(h_1 k) + \rho_2 \operatorname{ch}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k)) + \\ &+ \rho_3 (\rho_1 \operatorname{sh}(h_1 k) \cdot \operatorname{sh}(h_2 k) + \rho_2 \operatorname{ch}(h_1 k) \cdot \operatorname{ch}(h_2 k)); \\ b &= gk \rho_2 (\rho_1 \operatorname{sh}(h_1 k) \cdot (\operatorname{ch}(h_2 k) + \operatorname{sh}(h_2 k)) + \rho_2 (\operatorname{ch}(h_1 k) - \\ &- \operatorname{sh}(h_1 k)) \cdot \operatorname{sh}(h_2 k) - \rho_3 \operatorname{sh}((h_1 + h_2)k)) \\ c &= g^2 k^2 (\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3) \operatorname{sh}(h_1 k) \cdot \operatorname{sh}(h_2 k). \end{aligned}$$

Решения уравнения легко выписываются в виде

$$\omega_1^2 = gk; \quad \omega_2^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad \omega_3^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый из выписанных корней соответствует режиму колебаний «сплошной среды», т.е. когда наличие зон стратификации ни как не сказывается на характере движения. При этом амплитуды волн на более глубоких поверхностях раздела меньше, чем на свободной поверхности. Второй и третий корни дисперсионного уравнения возникают именно вследствие стратификации жидкости и соответствуют режимам «внутренних волн», когда амплитуды волновых возмущений на внутренних границах раздела превышают амплитуды волн на свободной поверхности. Получение отношений амплитуд внутренних волн и выражений для форм поверхностей раздела сред: Для каждого из этих корней из системы можно найти отношения амплитуд волн, распространяющихся по разным поверхностям раздела:

$$\begin{aligned} \eta_{31}(\omega_j^2) &\equiv \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\rho_2 (\omega_j^2 \operatorname{ch}(h_1 k) - gk \operatorname{sh}(h_1 k))}{\omega_j^2 (\rho_2 \operatorname{ch}(h_2 k) + \rho_3 \operatorname{sh}(h_2 k)) - gk(\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sh}(h_2 k)}; \\ \eta_{21}(\omega_j^2) &\equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{\omega_j^2} (\omega_j^2 \operatorname{ch}(h_1 k) - gk \operatorname{sh}(h_1 k)); \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\eta_{32}(\omega_j^2) \equiv \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\rho_2 \omega_j^2}{\omega_j^2 \left(\rho_2 \operatorname{ch}(h_2 k) + \rho_3 \operatorname{sh}(h_2 k) \right) - gk(\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sh}(h_2 k)}.$$

Вводя обозначения $\alpha_{nj} \equiv \alpha_n(\omega_j^2)$, где $(n, j = 1, 2, 3)$, запишем общие решения для функций $\xi_n(x, t)$, описывающих формы свободной поверхности и границ раздела слоёв, в виде:

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= \alpha_{11} e^{i(kx - \omega_1 t)} + \alpha_{12} e^{i(kx - \omega_2 t)} + \alpha_{13} e^{i(kx - \omega_3 t)}; \\ \xi_2(x, t) &= \eta_{21}(\omega_1^2) \alpha_{11} e^{i(kx - \omega_1 t)} + \eta_{21}(\omega_2^2) \alpha_{12} e^{i(kx - \omega_2 t)} + \eta_{21}(\omega_3^2) \alpha_{13} e^{i(kx - \omega_3 t)}; \\ \xi_3(x, t) &= \eta_{31}(\omega_1^2) \alpha_{11} e^{i(kx - \omega_1 t)} + \eta_{31}(\omega_2^2) \alpha_{12} e^{i(kx - \omega_2 t)} + \eta_{31}(\omega_3^2) \alpha_{13} e^{i(kx - \omega_3 t)}. \end{aligned}$$

Представляя комплексные амплитуды $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ в экспоненциальной форме $\alpha_{nj} = a_j e^{ib_j}$, найдем значения вещественных амплитуд a_j и фаз b_j из следующих начальных условий:

$$\xi_n(x, t=0) = \zeta_n e^{ikx}; \quad \frac{\partial \xi_n}{\partial t}(x, t=0) = 0. \quad (n = 1, 2, 3)$$

Первое из условий определяет начальные амплитуды волновых возмущений на всех трех поверхностях раздела сред, а второе задает нулевые начальные скорости движения этих поверхностей. В результате получим, что все фазы b_j можно принять равными нулю, а амплитуды a_j будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{\zeta_1 \left(\eta_{21}(\omega_2^2) \eta_{31}(\omega_2^2) - \eta_{21}(\omega_3^2) \eta_{31}(\omega_2^2) \right) + \zeta_2 \left(\eta_{31}(\omega_2^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) - \zeta_3 \left(\eta_{21}(\omega_2^2) - \eta_{21}(\omega_3^2) \right)}{\eta_{21}(\omega_1^2) \left(\eta_{31}(\omega_2^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) - \eta_{21}(\omega_2^2) \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) + \eta_{21}(\omega_3^2) \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_2^2) \right)}; \\ \alpha_{12} &= - \frac{\zeta_1 \left(\eta_{21}(\omega_1^2) \eta_{31}(\omega_3^2) - \eta_{21}(\omega_3^2) \eta_{31}(\omega_1^2) \right) + \zeta_2 \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) - \zeta_3 \left(\eta_{21}(\omega_1^2) - \eta_{21}(\omega_3^2) \right)}{\eta_{21}(\omega_1^2) \left(\eta_{31}(\omega_2^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) - \eta_{21}(\omega_2^2) \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) + \eta_{21}(\omega_3^2) \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_2^2) \right)}; \\ \alpha_{13} &= - \frac{\zeta_1 \left(\eta_{21}(\omega_2^2) \eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{21}(\omega_1^2) \eta_{31}(\omega_2^2) \right) - \zeta_2 \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_2^2) \right) + \zeta_3 \left(\eta_{21}(\omega_1^2) - \eta_{21}(\omega_2^2) \right)}{\eta_{21}(\omega_1^2) \left(\eta_{31}(\omega_2^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) - \eta_{21}(\omega_2^2) \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_3^2) \right) + \eta_{21}(\omega_3^2) \left(\eta_{31}(\omega_1^2) - \eta_{31}(\omega_2^2) \right)}. \end{aligned}$$

Зависимости отношений амплитуд внутренних волн к амплитуде внешних волн от физических параметров системы. Поскольку целью работы является анализ влияния стратификации жидкости на особенности колебательных движений, существующих в системе, ограничимся рассмотрением режимов «внутренних волн», т.е. будем анализировать только вто-

рой и третий корни дисперсионного уравнения. На рис. 2-5 представлены зависимости отношений амплитуд внутренних волн к амплитуде волны на свободной поверхности от разных физических параметров системы: от значений толщин и плотностей слоев.

На рис. 1, *а* и *б* представлены зависимости отношений амплитуд волн от толщины верхнего слоя h_1 , для корней дисперсионного уравнения ω_2 , ω_3 . Из полученных рисунков следует, что изменение толщины верхнего слоя оказывает значительное влияние на отношение амплитуд. Видно, что для корня ω_2 амплитуда a_2 больше амплитуды a_3 (рис. 1, *а*), а в случае корня ω_3 наоборот (рис. 1, *б*). Это дает основание сделать предположение о том, что корень ω_2 соответствует волнам, возбуждающимся на поверхности раздела верхней и средней сред, а ω_3 - волн, возбуждающимся на поверхности раздела средней и нижней сред. На рис. 1, *а* рост отношений амплитуд имеет почти линейный характер, в то время как на рис. 1, *б* наиболее резкое изменение амплитуд происходит при малых значениях, а с дальнейшим увеличением ширины верхнего слоя изменение графика значительно замедляется. Отметим, что значения амплитуд на первом графике существенно больше значений амплитуд на втором. Аналогичные зависимости отношений амплитуд от толщины среднего слоя h_2 , для корней ω_2 , ω_3 .

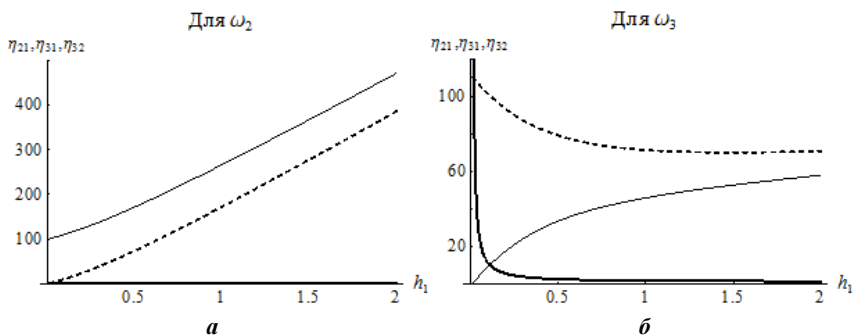


Рис. 1. Зависимости отношения амплитуд от толщины верхнего слоя h_1 для разных корней дисперсионного уравнения:
 $g = 1; k = 0.1; \rho_1 = 1; \rho_2 = 1.01; \rho_3 = 1.02; h_2 = 1;$
 η_{21} - тонкие сплошные линии, η_{31} - пунктирные линии, η_{32} - толстые сплошные линии (на рис. 1, *а* сливается с осью абсцисс)

На рис. 2, *a-в* изображены формы трех границ раздела при начальном возмущении верхней границы. В качестве характерного временного масштаба T выбираем наибольший из периодов. Из рисунков наглядно видно, что в данном случае амплитуды волн на внутренних поверхностях раздела меньше амплитуды волны на свободной поверхности и составляют десятые доли от значения последней. Это характерно для режима колебаний «сплошной среды».

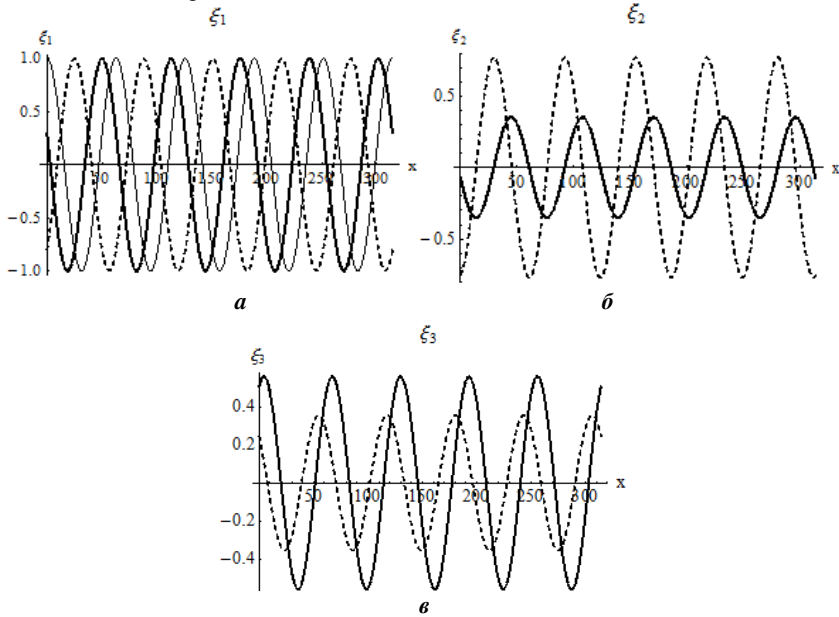


Рис. 2. Формы поверхностей раздела слоев при начальном возмущении верхней границы:

$g = 1; k = 0.1; \rho_1 = 1; \rho_2 = 1.01; \rho_3 = 1.02; h_1 = 1; h_2 = 1.5; \zeta_1 = 1; \zeta_2 = 0; \zeta_3 = 0;$
 $t = 0$ - тонкие сплошные линии, $t = 2T$ - пунктирные линии,
 $t = 4T$ - толстые сплошные линии

Рис. 3, *a-в* аналогичны рис. 2, *a-в*, соответственно, но рассчитаны при начальном возмущении средней границы раздела. Из рисунков видно, что в данном случае амплитуды волн на среднем слое жидкости превышают амплитуды волн как на свободной поверхности, так и нижнем слое. Причем амплитуды поверхностных волн на один - два порядка ниже амплитуд внутренних волн, что является характерной особенностью режима колебаний «внутренних волн».

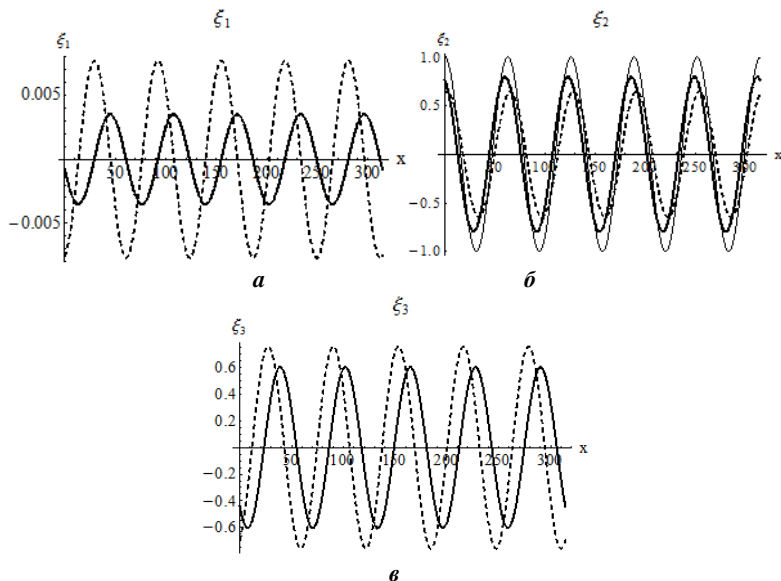


Рис. 3. Формы поверхностей раздела слоев при начальном возмущении средней границы:

$g = 1; k = 0.1; \rho_1 = 1; \rho_2 = 1.01; \rho_3 = 1.02; h_1 = 1; h_2 = 1.5; \zeta_1 = 0; \zeta_2 = 1; \zeta_3 = 0;$
 $t = 0$ - тонкие сплошные линии, $t = 2T$ - пунктирные линии,
 $t = 4T$ - толстые сплошные линии

Основные результаты работы: Выведено в аналитическом виде дисперсионное уравнение для периодических гравитационных волн в трехслойной несмешивающейся жидкости. Показано, что частоты внутренних волн сравнимы по величине и много меньше частоты поверхностных волн. Как показывает расчет, при малой разности плотностей жидкостей амплитуды внутренних волн много больше амплитуд поверхностных, а отношение внутренних волн остается конечным

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1959. 699 с.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
4. Сретенский Л.Н. // Журн. геофизики. 1934. Т. 4, вып. 3. С. 332–367.

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 541.127.4

А. Н. Новикова, М. Е. Соловьев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: *NoviKovoyAnne@yandex.ru*,
soloviev56@gmail.com

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА АНТИОКСИДАНТНОЙ АКТИВНОСТИ ИНГИБИТОРОВ ФЕНОЛЬНОГО ТИПА

Рассматриваются термодинамические функции реакции взаимодействия антиоксидантов фенольного типа с моделями липидов. Оценивается корреляционная зависимость константы скорости реакции взаимодействия фенолов с радикалами.

Ключевые слова: антиоксидантная активность, радикальное окисление липидов.

A. N. Novikova, M. E. Soloviev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: NoviKovoyAnne@yandex.ru,
soloviev56@gmail.com

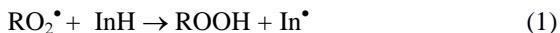
QUANTUM CHEMICAL ASSESSMENT OF ANTIOXIDANT ACTIVITY OF INHIBITORS OF PHENOL TYPE

The article deals with the reaction of antioxidants of phenol type with models of lipids. We established the correlation dependence of the reaction rate constants for the reactions of phenols with the radicals.

Keywords: antioxidant activity, radical oxidation of lipids.

Наиболее известными ингибиторами радикальных реакций являются фенолы и ароматические амины. Антиоксиданты фенольного типа характеризуются наличием в молекуле подвижного атома водорода, при отрыве которого остается малоактивный радикал, не способный вызывать продолжение цепи радикальных реакций [1]. Антиоксидант взаимодействует с радикалами, образуя радикалы в результате окисления липидов, отдавая им радикал водорода. Эффективность антиоксиданта будет тем выше, чем стабильнее образующийся радикал ингибитора [2].

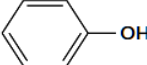
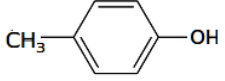
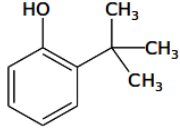
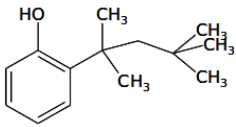
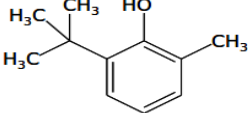
Торможение окисления происходит за счет участия ингибитора в реакциях обрыва цепей. Данная реакция характеризует активность ингибитора InH, взаимодействовать с первичными углеводородными радикалами R[•]:

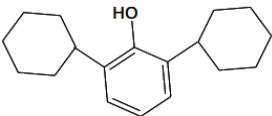
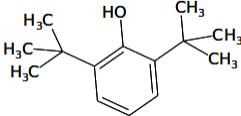
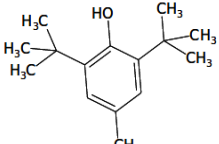
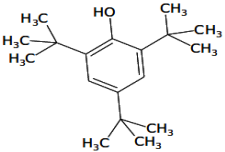

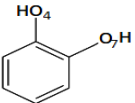
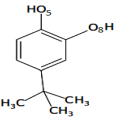


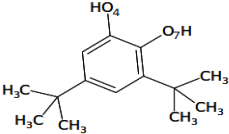
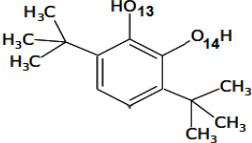
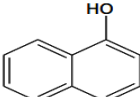
Фенольные антиоксиданты делятся на незкранированные и экранированные. Последние имеют в *орто*-положениях к функциональной группе –ОН алкильные или *трет*-бутильные заместители.

В таблице 1 представлены структурные формулы ингибиторов реакции окисления с указанием номеров активных центров – атомов кислорода, для которых вычислялись термодинамические функции реакции отрыва атома водорода: электронная энергия (ΔE), энтальпия (ΔH) и свободная энергия Гиббса (ΔG).

Таблица 1. Термодинамические функции реакции (1) с *цис*-гептадиеном-2,5

№	Реакция	ΔE	ΔH	ΔG
1	 фенол	56,98	53,8	50,55
2	 4-метилфенол	50,19	46,85	43,77
3	 2- <i>трет</i> -бутилфенол	36,3	32,81	28,93
4	 2- <i>трет</i> -октилфенол	47,02	44,55	37,16
5	 2-метил-6- <i>трет</i> -бутилфенол	36,99	33,78	31,66

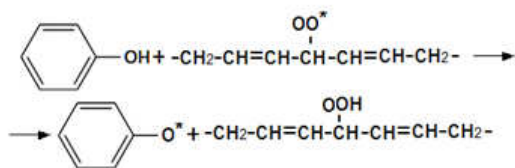
№	Реакция	ΔE	ΔH	ΔG
6	 <p>2,6-дициклогексилфенол</p>	30,25	27,13	22,11
7	 <p>2,6- ди-<i>tert</i>-бутилфенол</p>	14,77	11,25	10
8	 <p>Ионол</p>	8,4	4,76	0,96
9	 <p>2,4,6- три-<i>tert</i>-бутилфенол</p>	10	8,46	6,73
10	 <p>Гидрохинон_О6 Гидрохинон_О7</p>	39,85 39,82	37,95 37,95	33,65 33,67
11	 <p>Пирокатехин_О4 Пирокатехин_О7</p>	61,08 153,5	58,57 148,55	55,81 144,13
12	 <p>4- <i>tert</i>-бутилпирокатехин_О5 4- <i>tert</i>-бутилпирокатехин_О8</p>	24,05 50,39	22,76 48,8	21,55 46,49

№	Реакция	ΔE	ΔH	ΔG
13	 3,5- ди- <i>tert</i> -бутилпирокатехин_О4 3,5- ди- <i>tert</i> -бутилпирокатехин_О7	23,56 36,44	23,43 36,61	24,96 38,68
14	 3,6- ди- <i>tert</i> -бутилпирокатехин_О13 3,6- ди- <i>tert</i> -бутилпирокатехин_О14	29,12 90,42	27,25 87,47	24,58 82,31
15	 α -нафтол	36,35	34,05	30,39

Расчет полных электронных энергий и термодинамических функций, участвующих в реакциях соединений, производили квантово-химическим методом функционала плотности [3, 4] с гибридным обменно-корреляционным функционалом Беке (Becke) [5], Ли, Яна и Парра (Lee, Yang and Parr) [6] DFT B3LYP/cc-pvdz с открытыми оболочками [7] с использованием программного комплекса NWChem [8]. В процессе вычислений производилась оптимизация геометрии исследуемых соединений (исходных веществ и продуктов реакций), в ходе которой для каждого из них была найдена конформация, отвечающая минимуму потенциальной энергии.

Ранее, в работе [9] квантово-химическим методом на примере полиненасыщенных кислот было показано, что энергия отрыва атома водорода в бисаллильной метиленовой группе определяется структурой радикала и не зависит от длины углеводородного "хвоста" кислоты и близости расположения карбоксильной группы. В связи с этим в настоящей работе в качестве модели углеводородного фрагмента полиненасыщенной кислоты был выбран *цис*-гептадиен-2,5. Также для сравнения были рассмотрены термодинамические функции реакции отрыва водорода от α -углеродного атома для молекулы *цис*-гептена-2.

В результате окисления липида образуется набор радикалов по реакции



В таблице 1-2 приведены рассчитанные значения термодинамических функций реакции (1) для реакционных центров фенольных ингибиторов при взаимодействии с радикалами диена и олефина. Данная реакция является эндотермической. Величины термодинамических функций уменьшается с увеличением количества и объема *para*- и *ortho*-заместителей.

Таблица 2. Термодинамические функции реакции (1) с *цис*-гептенем-2

№	Реакция	ΔE	ΔH	ΔG
1	Фенол	57,51	55,14	51,92
2	4-метилфенол	50,73	48,19	45,14
3	2- <i>трет</i> -бутилфенол	36,83	34,15	30,3
4	2- <i>трет</i> -октилфенол	47,55	45,89	38,53
5	2-метил-6- <i>трет</i> -бутилфенол	37,52	35,12	33,03
6	2,6-дициклогексилфенол	30,78	28,47	23,48
7	2,6-ди- <i>трет</i> -бутилфенол	15,31	12,59	11,37
8	Ионол	8,94	6,1	2,33
9	2,4,6-три- <i>трет</i> -бутилфенол	10,54	9,8	8,1
10	Гидрохинон_О6	40,38	39,29	35,02
	Гидрохинон_О7	40,36	39,29	35,04
11	Пирокатехин_О4	61,61	59,91	57,18
	Пирокатехин_О7	154,04	149,89	145,5
12	4- <i>трет</i> -бутилпирокатехин_О5	24,58	24,1	22,92
	4- <i>трет</i> -бутилпирокатехин_О8	50,92	50,14	47,86
13	3,5-ди- <i>трет</i> -бутилпирокатехин_О4	24,1	24,77	26,33
	3,5-ди- <i>трет</i> -бутилпирокатехин_О7	36,97	37,95	40,05
14	3,6-ди- <i>трет</i> -бутилпирокатехин_О13	29,65	28,59	25,95
	3,6-ди- <i>трет</i> -бутилпирокатехин_О14	90,95	88,81	83,68
15	α -нафтол	36,88	35,39	31,76

Наименьшие значения термодинамических функций из одноатомных фенолов наблюдается у 2,6-ди-*трет*-бутилфенола (7), ионола (8) и 2,4,6-три-*трет*-бутилфенола (9). Среди двухатомных фенолов наименьшие значения прослеживаются у тех соединений, где алкильные заместители расположены в *пара-орто*-положениях относительно гидроксильной группы. Данную закономерность можно объяснить

характерной структурой данных соединений. Объемные *орто*-заместители создают стерические препятствия взаимодействию фенольных антиоксидантов с ROO^\bullet . Активность фенолов усиливается также при наличии в *орто*- и *пара*-положениях заместителей электронодонорной природы и ослабляется при введении электрооакцепторов.

Таким образом, объемные алкильные группы, проявляя +I-эффект, перераспределяют электронную плотность, тем самым увеличивая длину сопряженной системы. В результате электронная плотность сосредотачивается в *орто*- и *пара*-положениях, поэтому наиболее реакционно-способной является гидроксильная группа $-\text{OH}$ у ионола (8) среди одноатомных и у 3,5-ди-*трет*-бутилпирокатехин_О₄ (13) среди двухатомных.

Эффективность торможения, которая определяется совокупностью реакций ингибитора, обозначается как антиоксидантная активность (АОА). Количественной мерой АОА является период индукции (τ_i). Для сильных ингибиторов величина периода индукции определяется зависимостью

$$\tau_i = \frac{f[\text{InH}]}{w_i}, \quad (2)$$

где f - число цепей, обрываемых на одной молекуле ингибитора; $[\text{InH}]$ - концентрация ингибитора; w_i - скорость иницирования.

Эффективность и механизм действия ингибиторов качественно могут быть оценены по характеру кинетических кривых. В работе [9] обсуждается взаимосвязь константы скорости реакции K_1 и структуры ингибитора. Для большинства фенолов и ароматических аминов значения K_1 лежат в интервале 10^4 - $10^6 \text{ M}^{-1}\cdot\text{c}^{-1}$. Было установлено, что антирадикальная активность усиливается за счет донорного эффекта метильных групп, расположенных в *орто*- и *пара*-положениях.

Как уже было сказано, наиболее эффективные антиоксиданты образуют устойчивые радикалы, что обеспечивает минимальную энтальпию реакции. По величине энтальпии реакции можно оценивать антиоксидантную активность исследуемых соединений. Результаты термодинамических функций реакций приведены в «кДж/моль».

Сравнивая термодинамические функции, вычисленные для диена и олефина, можно сделать вывод, что наименьшие значения термодинамических функций наблюдаются у *цис*-гептадиена. Данную закономерность можно объяснить распределением заряда. У диена неспаренный электрон делокализован по семи углеродным атомам, что значительно увеличивает энергию его стабилизации и тем самым уменьшает энергию отрыва атома водорода.

На рис. 1-2 представлены корреляционные зависимости константы скорости реакции K_1 и значений энтальпий реакции (1) при взаимодействии фенольных ингибиторов с радикалами диена и олефина.

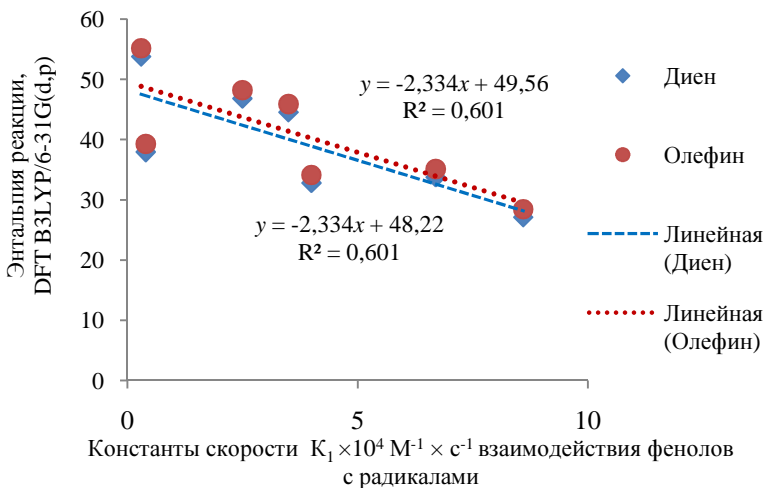


Рис. 1. Корреляционная зависимость константы скорости реакции взаимодействия первичных фенолов с пероксильными радикалами и энтальпии реакции

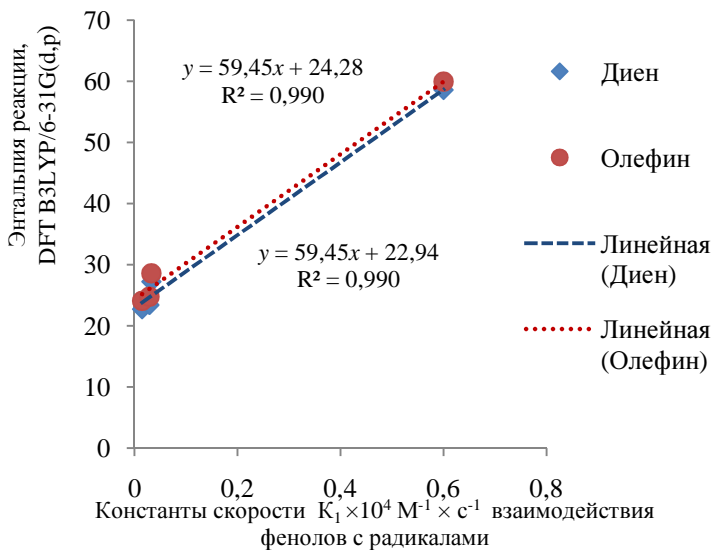


Рис. 2. Корреляционная зависимость константы скорости реакции взаимодействия вторичных фенолов с пероксильными радикалами и энтальпии реакции

Таким образом, наилучшая корреляционная зависимость наблюдается у вторичных фенольных антиоксидантов, которые образуют наиболее устойчивые структуры по сравнению с первичными фенолами, за счет расположения большого объема алкильных заместителей в *ortho*- и *para*-положениях относительно гидроксильных групп, обеспечивая, тем самым, минимальную энтальпию реакции и, как следствие, высокую антиоксидантную активность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов Е.Т. Окисление и деструкция карбоцепных полимеров. М.: Химия, 1990. 288 с.
2. Шляпников Ю.А. Антиокислительная стабилизация полимеров / Ю.А. Шляпников, С.Г. Кирюшин, А.П. Марья. М.: Химия, 1986. 256 с.
3. Hohenberg P., Kohn W. // Physical Review. 1964. 136(3). P. 864.
4. Kohn W., Sham L. // Physical Review. 1965. 140(4). P. 1133.
5. Becke A. D. // Journal of Chemical Physics. 1993. 98. P.56-48.
6. Miehlich B.A., Savin H.S., Preuss H. // Chemical Physics Letters. 1989. 157(3). P.200.
7. Mueller M. // Fundamentals of Quantum Chemistry. Molecular Spectroscopy and Modern Electronic Structure Computation. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. 2002. P. 259-261.
8. Valiev M., Bylaska E.J., Govind N. // Comput. Phys. Commun. 2010. 181. P.1477
9. Смирнова С.Ю., Соловьев М.Е. // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2012. Т. 55, вып. 11. С. 78-81.
10. Перевозкина М.Г. Тестирование антиоксидантной активности полифункциональных соединений кинетическими методами. Новосибирск: СибАК, 2014. 240 с.

УДК 542.943:66.023.001.57

**Г. В. Рыбина, А. Е. Мешечкина, Г. Ю. Тараненко,
А. В. Решихина, К. А. Сорокина**

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: rybinagv@ystu.ru

ВЫБОР АППАРАТУРНОГО ОФОРМЛЕНИЯ СИНТЕЗА 1,2-ЭПОКСИЦИКЛОПЕНТАНА

На основании составленной математической модели процесса окисления циклопентена водным раствором пероксидом водорода для единичного аппарата и каскада реакторов РИС-Н проведено теоретическое обоснование выбора аппаратурного оформления синтеза 1,2-эпоксидциклопентана.

Ключевые слова: 1,2-эпоксициклопентан, циклопентен, фазовое равновесие, модель Вильсона, модель NRTL, математическое моделирование, реактор РИС-Н, каскад реакторов.

**G. V. Rybina, A. E. Meshechkina, G. Yu. Taranenko,
A. V. Reshikhina, K. A. Sorokina**

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: rybinagv@ystu.ru

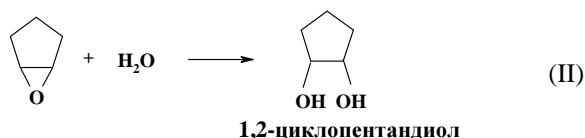
THE CHOICE OF EQUIPMENT FOR THE SYNTHESIS OF 1,2-EPOXYCYCLOPENTANE

The theoretical substantiation of the equipment choice for synthesis of 1,2-epoxycyclopentane is carried out on the basis of mathematical model for the oxidation of cyclopentene by aqueous hydrogen peroxide with using a single CSTR and cascade of reactors.

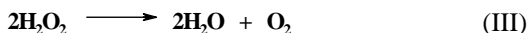
Keywords: 1,2-epoxycyclopentane, cyclopentene, phase equilibrium, Wilson and NRTL model, mathematical modeling, CSTRreactor, a cascade of continuous stirred tank reactors.

1,2-Эпоксициклопентан (1,2-ЭЦП) используется для синтеза полимерных конструкционных материалов, обладающих хорошими изоляционными свойствами и высокой термической стабильностью. Он применяется при производстве полупроводниковых материалов, гидравлических жидкостей, в синтезе фармацевтических препаратов.

Наиболее перспективным методом синтеза 1,2-ЭЦП является окисление циклопентена водным раствором пероксида водорода. В результате ранее проведенных лабораторных исследований установлено, что в процессе взаимодействия циклопентена (ЦП) с водным раствором пероксида водорода протекают две последовательные реакции: эпосидирование ЦП в 1,2-ЭЦП и гидратация образовавшегося эпоксида в 1,2-циклопентандиол (1,2-ЦД):



При окислении ЦП может протекать побочная реакция неселективного разложения пероксида водорода:



Взаимодействие ЦП с H_2O_2 происходит в гетерофазной системе жидкость – жидкость - пар (водная фаза – органическая фаза – паровая фаза) в присутствии пероксогетерополисоединения, которое образуется при взаимодействии Na_2WO_4 , H_3PO_4 и H_2O_2 in situ. Для переноса кислорода из водной фазы в органическую используют межфазный катализатор «Adogen 464».

Показано, что, изменяя условия проведения, процесс можно остановить на стадии получения эпоксида или довести до образования диола.

Найдено, что селективное образование 1,2-ЭЦП происходит при температуре $50\text{ }^\circ\text{C}$ и pH водной фазы 2,5 в среде *o*-ксилола, при небольшом мольном избытке пероксида водорода по отношению к ЦП (1,3 : 1). Выбранные условия обеспечивают за 2,5 ч конверсию ЦП 99,0 %, селективность образования 1,2-ЭЦП 95,24 % [1].

Известно, что при проектировании процесса для реализации в промышленности, результаты лабораторного эксперимента, проведенного в периодическом режиме, должны быть определенным образом скорректированы для условий непрерывного производства. Направления поиска технологических решений, обеспечивающих выполнение данной задачи, реализуются при математическом моделировании процесса.

На основе анализа литературных данных и промышленного опыта проведения реакции эпоксидирования, а также с учетом специфики реакции, протекающей в гетерофазной системе, и экзотермичности процесса показано, что для осуществления взаимодействия 1,2-эпоксициклопентана с водным раствором пероксида водорода в присутствии выбранного межфазного катализатора наиболее предпочтительным по простоте конструкции и надежности управления является одноступенчатый реактор, работающий в режиме идеального смешения. В качестве варианта аппаратного оформления синтеза 1,2-ЭЦП был принят РИС-Н с рубашкой, перемешивание в котором осуществляется за счет механической мешалки или циркуляционного контура с дополнительным выносным холодильником.

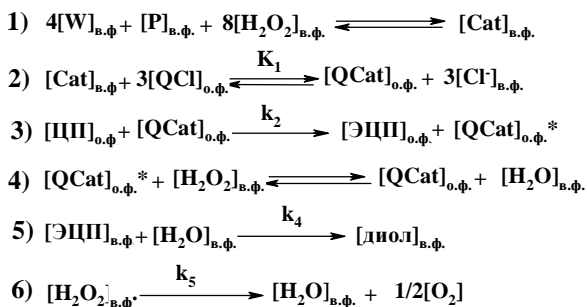
Математическая модель реактора синтеза 1,2-ЭЦП состояла из уравнений материального и теплового балансов с учетом кинетики реакции, массо-, теплообмена и характера движения технологического потока в реакторе.

Содержание компонентов реакционной смеси изменяется в результате:

- химических превращений, протекающих в системе (реакции I-III);
- фазовых переходов в системах жидкость - жидкость и жидкость - пар;
- гидродинамики потоков, движущихся в реакторе.

- Химические превращения, протекающие в системе

В рекомендованных условиях схему превращений ЦП можно представить следующим образом:



где $[W]_{\text{в.ф.}}$, $[P]_{\text{в.ф.}}$, $[QCl]_{\text{о.ф.}}$ – концентрации, соответственно, вольфрамата натрия и фосфорной кислоты в водной фазе и межфазного катализатора в органической фазе;

$[Cat]_{\text{в.ф.}}$, $[QCat]_{\text{о.ф.}}$, $[QCat]_{\text{о.ф.}}^*$ – концентрации каталитического комплекса, соответственно, в водной и в органической фазах (символом (*)) отмечен неактивный анион);

$[ЦП]_{\text{о.ф.}}$, $[H_2O_2]_{\text{в.ф.}}$, $[ЭЦП]_{\text{о.ф.}}$, $[ЭЦП]_{\text{в.ф.}}$, $[диол]_{\text{в.ф.}}$ – концентрации циклопентена, пероксида водорода, 1,2-эпоксициклопентана и 1,2-циклопентандиола в соответствующих фазах.

Исходя из представленной модели превращений, была составлена система дифференциальных уравнений, описывающих расходование реагентов и накопление продуктов реакции:

$$\frac{d[ЦП]_{\text{о.ф.}}}{dt} = -k_2 \cdot [ЦП]_{\text{о.ф.}} \cdot [QCat]_{\text{о.ф.}}; \quad (1)$$

$$\frac{d[H_2O_2]_{\text{в.ф.}}}{dt} = \frac{d[ЦП]_{\text{о.ф.}}}{dt} - k_5 \cdot [H_2O_2]_{\text{в.ф.}}; \quad (2)$$

$$\frac{d[ЭЦП]_{\text{о.ф.}}}{dt} = k_2 \cdot [ЦП]_{\text{о.ф.}} \cdot [QCat]_{\text{о.ф.}} - k_4 \cdot [ЭЦП]_{\text{в.ф.}} \cdot [H_2O]; \quad (3)$$

$$\frac{d[1,2-ЦД]_{\text{в.ф.}}}{dt} = k_4 \cdot [ЭЦП]_{\text{в.ф.}} \cdot [H_2O]. \quad (4)$$

Система уравнений (1) – (4) была решена аналитически. В результате получены значения констант скорости, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1. Кинетические параметры взаимодействия ЦП с водным раствором пероксида водорода

Параметр, размерность	Значение
$K_1 \cdot 10^{-4}$	$6,37 \pm 0,05$
$k_2, \text{л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$	$2,41 \pm 0,01$
$k_4 \cdot 10^3, \text{л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$	$0,01 \pm 0,001$
$k_5 \cdot 10^3, \text{мин}^{-1}$	$0,5 \pm 0,1$

Показано, что предложенная кинетическая модель адекватно описывает процесс взаимодействия ЦП с пероксидом водорода в заданных условиях. Расчетное значение критерия Фишера $F_{\text{ЭЦП}} = 0,71$, что меньше $F_{\text{табл}} = 1,77$ [2].

- Фазовые переходы в системах жидкость - жидкость и жидкость - пар

Жидкофазная реакция окисления 1,2-ЭЦП протекает в условиях ограниченной взаимной растворимости жидких компонентов. В реакторе сосуществуют две жидкие фазы – органическая, состоящая на 70 % из ксилола и водная. Кроме этого, в условиях синтеза образуется равновесная паровая фаза. Показано, что все компоненты реакционной смеси распределяются между этими фазами. Выведены зависимости, описывающие значения концентраций компонентов в каждой из фаз:

$$y_i = \frac{M_0 \cdot x_i^{M_0}}{V + \frac{L_1}{K_i^{V-L_1}} + \frac{L_2}{K_i^{V-L_2}}}; \quad x_i^{L_1} = \frac{M_0 \cdot x_i^{M_0}}{V \cdot K_i^{V-L_1} + L_1 + \frac{L_2}{K_i^{L_1-L_2}}};$$

$$x_i^{L_2} = \frac{M_0 \cdot x_i^{M_0}}{V \cdot K_i^{V-L_2} + L_1 \cdot K_i^{L_1-L_2} + L_2},$$

где V, L_1, L_2 - мольный расход паровой, органической и водной фаз соответственно, кмоль/ч; M_0 - мольный расход исходной смеси, кмоль/ч; y_i - мольная доля компонента в паровой фазе, мол. д.; $x_i^{L_1}, x_i^{L_2}, x_i^{M_0}$ - мольная доля компонента в органической, водной и исходной смеси соответственно, мол.д.

Проведено экспериментальное определение необходимых для моделирования констант фазового равновесия в системе жидкость - жидкость и в системе жидкость - пар.

Изучено распределение 1,2-ЭЦП между жидкими фазами в интервале температуры от 11 до 60 °С (табл. 2).

Таблица 2. Влияние температуры на распределение 1,2-ЭЦП между органической и водной фазами

Объемное отношение водная фаза к органической 1,6 : 1, концентрация 1,2-ЭЦП до расслаивания 0,278 моль/дм³

Температура, °С	11,0	25,0	39,2	49,0	59,0
Равновесная концентрация 1,2-эпоксициклопентана, моль/л					
в органической фазе	4,586	4,355	4,237	4,102	3,928
в водной фазе	0,286	0,435	0,452	0,512	0,681
$K_{ЭЦП}$	61,84±12,3	59,07±11,8	52,12±10,4	46,30±9,2	40,35±8,0

Константы распределения K_i компонентов реакционной смеси между жидкими фазами при 25 °С рассчитаны аналогично:

Вещество	K_i
Циклопентен	100000,00
Пероксид водорода	0,000012±0,000002
1,2-Эпоксициклопентан	59,06±11,81
Каталитический комплекс	100000,00
Вода	0,000131±0,000026
Ксилол	47347,0±9469,4
1,2-Циклопентандиол	2,61±0,52

Такая разница в значениях констант распределения для компонентов реакционной смеси свидетельствует о ее сильной неидеальности, подтверждением чего является расслаивание вследствие ограниченной растворимости отдельных компонентов [3].

В связи с отсутствием в литературе данных, было изучено парожидкостное равновесие для двух бинарных систем – циклопентен-1,2-ЭЦП и эпоксид-*o*-ксилол, компоненты которых являются ключевыми при моделировании реактора и блока разделения. Термодинамическая проверка полученных экспериментальных данных, проведенная по методу Херингтона и Редлиха – Кистера, показала их термодинамическую согласованность.

Экспериментальные данные обработаны по стандартным методикам с помощью методов Вильсона, NRTL (табл. 3).

Таблица 3. Параметры интерполяционных уравнений Вильсона и NRTL, значения отклонений общего давления в исследованных системах

Бинарная система	Параметры уравнения	
	Метод Вильсона	Метод NRTL
ЦП-1,2-ЭЦП	$\Lambda_{12} = 0,9918$, $\Lambda_{21} = 0,7924$; погрешность 0,34 %	$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,5007$; $\Delta g_{12} = 141,5739$; $\Delta g_{21} = 146,5949$; погрешность 1,43 %
1,2-ЭЦП- <i>o</i> -ксилол	$\Lambda_{12} = 0,5187$, $\Lambda_{21} = 1,0915$; погрешность 0,47 %	$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,2000$; $\Delta g_{12} = 260,6924$; $\Delta g_{21} = 419,3954$; погрешность 1,36 %

- Гидродинамика потоков, движущихся в реакторе

Уравнение гидродинамики потока для модели РИС-Н записывается в стандартном виде:

$$\frac{dC}{d\tau} = \frac{\vartheta}{V} \cdot (C_{\text{вход}} - C_{\text{выход}}) = \frac{1}{T} \cdot (C_{\text{вход}} - C_{\text{выход}}),$$

где $C_{\text{вход}}$ - концентрация вещества на входе в аппарат; $C_{\text{выход}}$ - концентрация вещества в аппарате и на выходе из аппарата; τ - время; V - объем аппарата; ϑ - объемный расход потока через аппарат; T - среднее время пребывания технологического потока в аппарате.

При стационарном режиме в реакторе РИС-Н принимается $\frac{dC}{d\tau} = 0$

Объединенная математическая модель реактора идеального смешения синтеза 1,2-ЭЦП, работающего в непрерывном режиме, выглядит следующим образом:

$$[\text{ЦП}]_{\text{выход}} = \frac{[\text{ЦП}]_{\text{вход}}^{\text{оф}}}{k_2 \cdot [\text{QCat}]_{\text{о.ф.}} \cdot \tau + 1} + \frac{\vartheta \cdot [\text{ЦП}]_0}{V_{\text{нф}} + \frac{L_1}{K_{\text{ин}}^{V-L_1}} + \frac{L_2}{K_{\text{ин}}^{V-L_2}}} + \frac{\vartheta \cdot [\text{ЦП}]_0}{V_{\text{нф}} \cdot K_i^{V-L_2} + L_1 \cdot K_i^{L_1-L_2} + L_2};$$

$$[\text{H}_2\text{O}_2]_{\text{выход}} = \left(-k_2 \cdot [\text{ЦП}]_{\text{выход}}^{\text{оф}} \cdot [\text{QCat}]_{\text{о.ф.}}\right) \cdot \tau + [\text{H}_2\text{O}_2]_{\text{вход}}^{\text{оф}} + \frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_{\text{вход}}^{\text{вф}}}{(k_5 \cdot \tau + 1)} + \frac{\vartheta \cdot [\text{H}_2\text{O}_2]_0}{V_{\text{нф}} + \frac{L_1}{K_{\text{H}_2\text{O}_2}^{V-L_1}} + \frac{L_2}{K_{\text{H}_2\text{O}_2}^{V-L_2}}};$$

$$[\text{ЭЦП}]_{\text{выход}} = k_2 \cdot [\text{ЦП}]_{\text{выход}}^{\text{оф}} \cdot [\text{QCat}]_{\text{о.ф.}} \cdot \tau - \frac{[\text{ЭЦП}]_{\text{вход}}^{\text{вф}}}{k_4 \cdot [\text{H}_2\text{O}] \cdot \tau + 1} + \frac{\vartheta \cdot \left([\text{ЭЦП}]_{\text{выход}}^{\text{оф}} + [\text{ЭЦП}]_{\text{выход}}^{\text{вф}}\right)}{V_{\text{нф}} + \frac{L_1}{K_{\text{ЭЦП}}^{V-L_1}} + \frac{L_2}{K_{\text{ЭЦП}}^{V-L_2}}};$$

$$[1,2-\text{ЦД}]_{\text{выход}} = k_4 \cdot [\text{ЭЦП}]_{\text{выход}}^{\text{вф}} \cdot [\text{H}_2\text{O}] \cdot \tau - \frac{\vartheta [1,2-\text{ЦД}]_{\text{выход}}^{\text{вф}}}{V_{\text{нф}} \cdot K_{1,2-\text{ЦД}}^{V-L_1} + L_1 + \frac{L_2}{K_{1,2-\text{ЦД}}^{L_1-L_2}}} - \frac{\vartheta [1,2-\text{ЦД}]_{\text{выход}}^{\text{вф}}}{V_{\text{нф}} + \frac{L_1}{K_{1,2-\text{ЦД}}^{V-L_1}} + \frac{L_2}{K_{1,2-\text{ЦД}}^{V-L_2}}}.$$

Для изотермического режима в реакторе математическая модель дополнена уравнением теплового баланса:

$$\vartheta \cdot C_p \cdot \rho \cdot T_0 = \vartheta \cdot C_p \cdot \rho \cdot T_{\text{выход}} + \Delta H_1 \cdot \left(k_2 \cdot [\text{ЦП}]_{\text{выход}}^{\text{оф}} \cdot [\text{QCat}]_{\text{о.ф.}}\right) \cdot V + \Delta H_2 \cdot \left(k_4 \cdot [\text{ЭЦП}]_{\text{выход}}^{\text{вф}} \cdot [\text{H}_2\text{O}]\right) \cdot V - K \cdot F \cdot \Delta T - H_V \cdot m.$$

Исходя из полученной системы уравнений показано, что изменение выхода 1,2-эпоксидциклопентана, как промежуточного продукта в последовательной реакции, проходит через максимум при значении τ_{max} равном 7,01 ч и составляет 94,20 % (рис. 1).

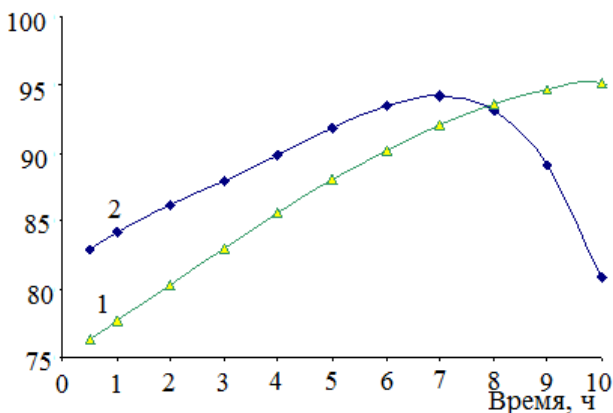


Рис. 1. Зависимость конверсии циклопентена (1) и выхода 1,2-эпоксидциклопентана (2) от времени пребывания в единичном РИС-Н

При производительности по 1,2-эпоксидциклопентану 5 тыс. т в год объем реактора составит $18,57 \text{ м}^3$, площадь поверхности теплообмена - $28,83 \text{ м}^2$. Для снятия тепла реакции требуемая поверхность теплообмена $42,86 \text{ м}^2$, коэффициент скорости отвода тепла $K_{\text{усл}} = 1287,55 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$.

Таким образом, единичный РИС-Н не обеспечивает оптимальное протекание синтеза 1,2-эпоксидциклопентана ни по показателям процесса, ни по тепловому режиму в реакторе. Решением этих проблем является проведение синтеза в каскаде реакторов РИС-Н.

При расчете каскада реакторов для каждой ступени использовались уравнения материального и теплового балансов одиночного реактора смешения непрерывного действия (уравнения (12) – (13)). Решая систему уравнений относительно концентраций реагентов, выходящих из последнего реактора, подобрано такое количество аппаратов, чтобы максимально приблизиться к показателям лабораторного синтеза. Этого удается достичь в каскаде из шести реакторов при изотермических условиях протекания реакции (табл. 5).

Использование каскадной схемы дает возможность проводить синтез окиси циклопентена при программируемом изменении температуры в реакторах. Показано, что с помощью составленной математической модели можно подобрать температурный режим, обеспечивающий такие же показатели синтеза, но в меньшем количестве реакторов в каскаде (табл. 6).

Таблица 5. Влияние количества реакторов в каскаде на показатели синтеза 1,2-эпоксидциклопентана

Температура 50 °С; растворитель ксилол; концентрации, моль/дм³: в водной фазе: пероксида водорода – 4,0, Na₂WO₄·2H₂O – 0,06; в органической фазе: циклопентена – 5,0; молярные отношения: циклопентен : пероксид водорода 1 : 1,3, Na₂WO₄ : H₃PO₄ : катамин АБ 1 : 1 : 0,36; объемное отношение водной фазы к органической 1,6 : 1; pH водной фазы 2,5

Количество реакторов в каскаде N, шт.	Время пребывания, ч	Конверсия ЦП X _{ЦП} , %	Выход 1,2-ЭЦП η _{ЭЦП} , %
2	3,51	92,54	94,57
3	2,34	92,88	94,92
4	1,75	93,36	95,12
5	1,40	93,74	96,00
6	1,17	94,12	96,92
8	0,88	94,28	96,18
10	0,70	94,33	95,55

Таблица 6. Моделирование каскада РИС-Н при программируемом изменении температуры в реакторах

N, шт.	Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3		
	t, °С	X _{ЦП} , %	η _{ЭЦП} , %	t, °С	X _{ЦП} , %	η _{ЭЦП} , %	t, °С	X _{ЦП} , %	η _{ЭЦП} , %
1	50	29,17	30,04	50	29,17	30,04	50	29,17	30,04
2	50	49,69	51,17	52	51,93	49,40	50	49,69	51,17
3	50	70,22	72,31	54	73,38	69,81	55	83,98	81,15
4	50	81,03	83,44	56	84,68	80,56	60	94,27	96,97
5	50	88,54	91,17	58	92,52	88,02	60	96,02	96,28
6	50	94,12	96,92	60	98,36	93,57	60	97,55	93,11

Анализ полученных данных показал, что при проведении синтеза 1,2-ЭЦП в каскаде РИС-Н из четырех последовательных реакторов при программируемом повышении температуры в соответствии с 3-м вариантом удается достичь заданных показателей процесса при суммарном объеме аппаратов 14 м². Ввиду превышения коэффициента съема тепла K_{усл} более 900 Вт/(м³·К) для первых двух реакторов, к установке требуются аппараты с внешней циркуляцией потока через выносной холодильник. В качестве третьего и четвертого реакторов можно применять аппараты с мешалкой. Съем выделившегося тепла в этом случае обеспечивается через рубашку реактора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мешечкина А.Е.* Синтез 1,2-эпоксидциклопентана и 1,2-циклопентандиола на основе циклопентена: Дис. ... канд. хим. наук. Ярославль, 2010. 155 с.
2. Кинетическая модель гидропероксидного окисления циклоолефинов C₅-C₆ – основа проектирования реактора / А.Е. Мешечкина, Л.В. Мельник, С.С. Среднев, Ю.А. Москвичев, А.С. Шевчук // Тез. докл. XIV Междунар. науч.-техн. конф. «Наукоемкие химические технологии-2012», Тула – Ясная Поляна – Куликово Поле, 21-25 мая 2012 г. М.: Изд-во МИТХТ, 2012. С. 76.
3. *Худяков В.В.* Выделение 1,2-эпоксидциклопентана из водной фазы продуктов окисления циклопентена / В.В. Худяков, Г.В. Рыбина, А.Е. Мешечкина, А.Д. Турьянова // 68-я Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием. 22 апреля 2015 г., Ярославль: сб. материалов конф. [Электронный ресурс]. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 223-227.

УДК 66.048.54

Ю. Ю. Якименко, Ю. А. Крюкова, О. Н. Кorableва

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: yulyaschka.yakimenko@ya.ru,
uliya-krukova@mail.ru, korablevaon@yandex.ru

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ ПРОЦЕССА ВЫПАРИВАНИЯ

Целью работы является анализ методов расчета для определения числа выпарных аппаратов, расчет капитальных и эксплуатационных затрат.

Ключевые слова: процесс выпаривания, капитальные затраты, эксплуатационные затраты.

Y. Y. Yakimenko, Y. A. Kryukova, O. N. Korableva

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: yulyaschka.yakimenko@ya.ru,
uliya-krukova@mail.ru, korablevaon@yandex.ru

METHOD OF OPTIMIZATION IN THE CALCULATION OF THE EVAPORATION PROCESS

The goal of the paper is the analysis of methods of calculation for determining the number the number of evaporators, the calculation of capital and operating costs.

Keywords: evaporation process, capital costs, operating costs.

Методы оптимизации находят широкое применение в инженерных расчетах, например, для выбора наилучшего варианта конструкции аппарата, наилучшего распределение ресурсов и т. п.

Выбор оптимального решения или сравнение двух альтернативных решений проводится с помощью некоторой зависимой величины (функции), определяемой проектными параметрами. Эта величина называется целевой функцией. В процессе решения задачи оптимизации должны быть найдены такие значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет минимум (или максимум).

Примерами целевой функции, встречающимися в инженерных и экономических расчетах, является определение оптимального числа корпусов непрерывнодействующей выпарной установки. Оптимизация процесса должна обеспечить минимальные эксплуатационные затраты для получения раствора с заданной концентрацией при минимальных капитальных затратах [1].

Число корпусов выпарной установки является важным технологическим параметром, поскольку при увеличении числа корпусов снижается расход греющего пара на каждый килограмм выпариваемой воды, что, несомненно, приводит к снижению эксплуатационных затрат. В однокорпусном выпарном аппарате на выпаривание 1 кг воды приблизительно расходуется 1 кг греющего пара, в двухкорпусной выпарной установке расход греющего пара на выпаривание 1 кг воды должен составляет порядка 1/2 кг, в трехкорпусной - 1/3 кг, в четырехкорпусной - 1/4 и т. д. [2].

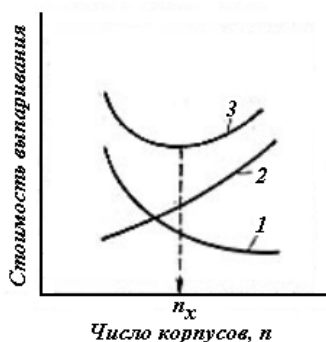
На практике экономия греющего пара значительно снижается с увеличением числа корпусов и для четырехкорпусной установки составляет порядка 10%. Снижение экономии греющего пара с увеличением числа корпусов выпарной установки указывает на целесообразность ограничения числа ее корпусов. Также с увеличением числа корпусов выпарной установки, уменьшается полезная разность температур на каждый корпус и, следовательно, увеличивается, при одной и той же производительности, общая поверхность нагрева выпарной установки.

Именно поэтому практически выбор числа корпусов производится исходя из технико-экономических соображений с использованием методов оптимизации (рис. 1) [2].

Эксплуатационные затраты на выпарную установку складываются из стоимости расходуемого первичного греющего агента, амортизации, ремонта, обслуживания, охлаждающей воды, электроэнергии на отсасывание парогазовой смеси из конденсатора и удаление воды из барометрического конденсатора. Удельный расход пара снижается сначала быстро, а затем все медленнее с увеличением числа корпусов. Поэтому на графике (см. рис. 1) эксплуатационные затраты будут иметь вид кривой 1.

Рис. 1. Оптимизация процесса выпаривания:

- 1 – эксплуатационные затраты;
2 – капитальные затраты;
3 – суммарная стоимость выпаривания 1 кг пара



Капитальные затраты будут увеличиваться с увеличением числа корпусов и их можно приближенно считать пропорциональными числу корпусов (зависимость 2).

Складывая ординаты линий 1 и 2, получают общую стоимость выпаривания 1 кг воды (кривая 3).

Расход охлаждающей воды на конденсацию паров в барометрическом конденсаторе можно определить по выражению

$$G_6 = \left[\frac{W \cdot (i_n - c \cdot t_6'')}{n \cdot (t_6'' - t_6') \cdot c} \right],$$

где W – количество выпаренной воды, кг/с; i_n – энтальпия греющего пара, Дж/кг; c – теплоемкость воды, Дж/(кг·К); t_6' , t_6'' – температура воды на выходе в барометрический конденсатор и на входе из него соответственно, °С; n – число корпусов выпарной установки.

Суммарная поверхность нагрева n корпусного выпарного аппарата составит

$$F = \left[\frac{n \cdot W \cdot (i_1 - c \cdot t_1)}{K_1 \cdot (t_n - t_1)} \right],$$

где K_1 – коэффициент теплопередачи в первом корпусе, Вт/(м²·К); t_1 – температура кипения раствора в первом корпусе, °С; t_n – температура греющего пара, °С;

Гельперин Н.И. предложил методику для определения оптимального числа корпусов [3]. Если принять стоимость греющего пара A руб./кг, воды B руб./кг, электроэнергии B руб./кВтч и затрат на амортизацию, ремонт и обслуживание D руб./м²·ч, то суммарные затраты на эксплуатацию выпарной установки составят

$$\Theta = \left[\frac{1,15 \cdot W}{n} \right] \cdot A + \left[\frac{W \cdot (t_n'' - ct_6')}{n \cdot (t_6'' - t_6')} \right] \cdot B + \left[\frac{N_1}{n} \right] \cdot B + D \cdot \left[\frac{n \cdot W \cdot (i_1 - ct_1)}{K_1 \cdot (t_n - t_1)} \right],$$

где N_1 – расход энергии в случае выпаривания раствора в однокорпусном вакуум-аппарате.

Для определения оптимального числа корпусов, соответствующего минимальной стоимости эксплуатации установки, приравняем $\frac{d\Theta}{dn}$ нулю:

$$\frac{d\Theta}{dn} = -\frac{1,15 \cdot W \cdot A}{n^2} - \frac{W \cdot (i_n - ct_6'')}{n^2 (t_6'' - t_6') \cdot c} - \frac{CN_1}{n^2} + \frac{D \cdot W (i_1 - ct_1)}{K_1 \cdot (t_n - t_1)} = 0.$$

Откуда

$$n = \sqrt{\frac{K_1 \cdot (t_n - t_1)}{D \cdot W (i_1 - ct_1)} \left(1,15 \cdot W \cdot A + \frac{W (i_n - ct_6'')}{(t_6'' - t_6') \cdot c} B \right) + CN_1}.$$

Так как основные энергетические затраты в процессе выпаривания определяются расходом первичного греющего пара, капитальные – стоимостью выпарного аппарата, то мы предлагаем для определения суммарных затрат на эксплуатацию выпарной установки упростить расчетную формулу.

Вводим в расчетную формулу затрат слагаемое, учитывающее капитальные вложения с учетом стоимости одного выпарного аппарата – 3.

С учетом эффективного фонда работы оборудования получим формулу

$$\Theta = \left[\frac{1,15 \cdot W}{n} \right] \cdot A + D \cdot \left[\frac{n \cdot W \cdot (i_1 - ct_1)}{K_1 \cdot (t_n - t_1)} \right] + \frac{3 \cdot n}{T_{\text{эф}}},$$

где 3 – стоимость выпарного аппарата; $T_{\text{эф}}$ – эффективный фонд работы оборудования, определяющийся по формуле

$$T_{\text{эф}} = \frac{[(365 - B - \text{ПР}) \cdot D \cdot C - T_{\text{рем}}] \cdot (100 - \text{П})}{100},$$

где B – количество выходных дней в году; ПР – количество праздничных дней в году; D – продолжительность одной смены, ч; C – количество смен; $T_{\text{рем}}$ – время ремонта оборудования во время работы цеха; П – простой оборудования во время чистки, %.

Для определения оптимального числа корпусов, соответствующего минимальной стоимости эксплуатации установки, приравняем $\frac{d\Theta}{dn}$ нулю:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dn} = -\frac{1,15 \cdot W \cdot A}{n^2} + \frac{D \cdot W (i_1 - ct_1)}{K_1 \cdot (t_n - t_1)} + \frac{3 \cdot n}{T_{\text{эф}}} = 0.$$

Откуда

$$n = \sqrt{\frac{K_1 \cdot (t_n - t_1) \cdot 1,15 \cdot W \cdot A \cdot T_{\text{эф}}}{T_{\text{эф}} \cdot D \cdot W (i_1 - ct_1) + 3 \cdot K_1 \cdot (t_n - t_1)}}.$$

Нами были проведены расчеты по методике, предложенной Н.И. Гельпериным. Оптимальное число корпусов для выпаривания раствора Na_2SO_4 составило три. Расчеты по предложенной нами методике отличаются не более пяти процентов от расчётов, проведенных по методике предложенной Н.И. Гельпериным. При этом обеспечивается простота и точность расчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. 8-е изд. М.: Химия, 1971. 784 с.
2. *Дыгнерский Ю.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии: Пособие по проектированию / Г. С. Борисов, В. П. Брыков, Ю. И. Дыгнерский [и др.]; под ред. Ю. И. Дыгнерского. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Химия, 1991. 496 с.
3. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

УДК 004.67

Н. И. Гусарова, А. В. Гусаров, Е. В. Олейникова

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева
Россия, г. Рыбинск, e-mail: gusarova-73@mail.ru, alvgus@mail.ru,
ev.olejnikova@yandex.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИН ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ЦИКЛА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В статье рассматриваются особенности методики проведения лабораторных работ на основе проблемного обучения во время работы в команде. Приведены основные этапы теоретического обоснования, подготовки и практической реализации данного подхода на примере имитации создания и обмена информацией по зашифрованному каналу связи.

***Ключевые слова:** информационные технологии, компетентностный подход, теория вероятности, статистические методы*

N. I. Gusarova, A. V. Gusarov, E. V. Oleynikova

*Rybinsk State University of Aviation Technology named after P. A. Solovyov
Russia, Rybinsk Yaroslavl region,
e-mail: gusarova-73@mail.ru, alvgus@mail.ru, ev.olejnikova@yandex.ru*

IMPLEMENTATION OF THE COMPETENCY APPROACH IN THE TEACHING OF NATURAL SCIENCE DISCIPLINES IN A TECHNICAL UNIVERSITY

The article discusses the features of a technique of laboratory work based on problem-based teaching during team work. The main stages of theoretical study, training and practical implementation of this approach using an example of simulation of the creation and exchange of information over an encrypted communication channel are given.

Keywords: *information technologies, competence approach, probability theory, statistical methods*

Компетентностный подход при преподавании дисциплин в техническом вузе предполагает, среди прочего, и использование продуктивного типа педагогического процесса, при котором широко используется проблемное обучение. Особенно это касается естественнонаучных дисциплин, которые можно отнести к информационным наукам. Многолетний опыт преподавания таких дисциплин, как «Защита информации» и «Информационная безопасность», в техническом вузе показывает, что наилучшим способом усвоения учебного материала является проблемное обучение во время работы в команде. Учебные дисциплины «Защита информации» и «Информационная безопасность» являются комплексными, использующими сведения из различных дисциплин учебного процесса, в частности, из информатики и высшей математики.

Работа в команде является одной из современных методик проведения лабораторных работ, направленных на реализацию компетентностного подхода, что отражено в стандартах ФГОСЗ+ для высшей школы. Работа в команде направлена на решение общей задачи путем творческого сложения результатов индивидуальной работы членов команды с делением полномочий и, самое главное, ответственности. Именно ответственности не хватает сегодня современным студентам. Работа в команде используется при проведении лабораторного практикума по дисциплине «Защита информации» для бакалавров, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника», а также в авиационном колледже университета.

Одним из тематических разделов дисциплины, изучаемых в рамках реализации компетентностного подхода к изучению предмета в процессе проведения лабораторного практикума, является изучение методов защиты каналов связи от внешних воздействий.

Известно, что методы воздействия на каналы связи можно условно разделить на 2 большие группы: бесконтактное воздействие через каналы приема и передачи информации (на современном этапе такими являются компьютерные сети) с использованием программных и аппаратно-программных средств, а также воздействие на каналы связи, приемно-передающую аппаратуру и носители при непосредственном контакте [1]. При изучении основ дисциплины студенты сталкиваются с такой проблемой: изучать методы защиты от воздействий на информационные системы приходится теоретически. Это связано с тем, что подвергать компьютерную сеть учебного заведения бесконтактным воздействиям, пусть даже и спланированным, с ограниченными возможностями, не представляется возможным из-за непредсказуемых последствий такой учебной «тренировки», а использование ряда средств воздействия является противозаконным

деянием. Организовать воздействие на каналы связи, приемно-передающую аппаратуру и носители при непосредственном контакте вряд ли возможно из-за больших затрат на «уничтоженные» или поврежденные каналы связи и носители, и по другим причинам (срыв учебного процесса, мобилизация всех ресурсов на ликвидацию последствий воздействия и т.д.). Единственная возможность изучения методов воздействия на каналы связи представляется в создании учебного защищенного канала связи и последующей имитации атаки нарушителя на этот канал путем изменения трафика. Это возможно, так как взаимодействие организуется через общедоступные внутрисетевые ресурсы, например, через общедоступные папки на сервере университета, а зашифрованный канал реализуется путем применения учебных программ. Применение лицензионных криптографических средств в данных условиях не представляется возможным вследствие их большой стоимости, проблем с обеспечением безопасности аппаратных средств в условиях их доступности для студентов, а также сложности получения и дальнейшего поддержания и подтверждения лицензии [2], поэтому используется программное обеспечение, разработанное в РГАТУ специально для решения учебных задач на основе материалов, опубликованных в открытой печати [1, 3, 4].

Процесс создания защищенного канала связи состоит из трех этапов.

Для создания зашифрованного канала связи студенты разбиваются на подгруппы, каждая из которых, в свою очередь, делится на «*Subscriber A*» (Абонент А) и «*Subscriber B*» (Абонент В). По условиям задачи «*Subscriber A*» и «*Subscriber B*» на начальных этапах (первом и втором) могут общаться друг с другом только через открытый канал связи, т.е. любое их неправильное действие может быть раскрыто потенциальным нарушителем, в качестве которого на этих этапах выступает преподаватель. На третьем этапе весь обмен осуществляется по закрытому каналу связи.

Процесс реализации этих этапов представляет собой криптопротокол, т. е. строго определенную последовательность действий, выполняемых двумя участниками обмена (в нашем случае это «*Subscriber A*» и «*Subscriber B*») с использованием, в том числе криптографических средств. Таким образом, все действия должны быть согласованы в команде заранее, до начала реализации учебной задачи, и выполняться в строгой последовательности в процессе её реализации. В противном случае канал не может быть реализован по техническим причинам, и задача не засчитывается. Если участники обмена попытаются общаться друг с другом через открытый канал связи по вопросам реализации учебной задачи, то задача не засчитывается, даже если учебный канал связи был реализован. В связи с этим, помимо методики работы в команде, студенты при создании защищенного канала связи осваивают методику выполнения опережающей самостоя-

тельной работы, которая подразумевает изучение студентами нового материала до его изучения в ходе аудиторных занятий.

На первом этапе *Subscriber A* генерирует ключ для симметричной криптосистемы (ключ для СКС), в качестве которой выступает криптосистема в соответствии с ГОСТ 28147–89 [4].

Криптографический ключ для симметричных криптосистем представляет собой последовательность из N бит, каждый из которых, как известно, может принимать 2 значения: 0 и 1, при этом значения битов должны иметь случайный характер в пределах всего ключа. Математическая модель данного вопроса основана на теории вероятности и выглядит следующим образом [5]. Имеется набор из $n = 256$ нулей и единиц. Этот набор представляет собой выборку из генеральной совокупности, имеющей дискретное распределение с двумя значениями $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ и соответствующими этим значениям вероятностями $p_1 = p_2 = 0,5$. Математическое ожидание данной случайной величины равно 0,5.

Для решения вопроса о случайности данной выборки выполнялись три пункта проверки условий. При выполнении первого пункта устанавливалось, значимо или нет отличается относительная частота появления нулей или единиц от теоретического значения вероятности появления нуля или единицы, равной 0,5. В качестве уровня значимости выбирался уровень $\alpha = 0,05$. В случае значимого отклонения относительной частоты от 0,5, можно утверждать, что выборка не является случайной, и дальнейшую проверку не проводить. При выполнении второго пункта использовался критерий пиков или критерий поворотных точек, на основе которого можно проверить, не слишком ли часто (или редко) в последовательности возникают изолированные нули или единицы. Этот этап позволяет исключить из рассмотрения выборки, имеющие вид «гребенки» или наоборот, содержащие только наборы групп нулей и единиц. При выполнении третьего пункта проверки использовался критерий серий. При использовании этого критерия отсекаются выборки, содержащие большое количество слишком длинных (или слишком коротких) наборов последовательных нулей и единиц. Выборка считалась независимой, т. е. ключ или гамму можно использовать, если на всех трех этапах проверки получался положительный результат.

Для реализации указанных трех этапов было разработано программное обеспечение, позволяющее сгенерировать ключ, а затем проверить его на случайность. Комплекс программ включает в себя генератор ПСЧ, тестирующую программу и СУБД. Для генерации ключа использовался линейный конгруэнтный генератор, в дальнейшем предполагается использовать стохастический генератор. Исходные данные для разработки программного обеспечения были взяты только из открытых источников.

На втором этапе (рис. 1) *Subscriber B* генерирует ключи для несимметричной криптосистемы (ключи для НСКС, открытый и закрытый), в качестве несимметричной криптосистемы выступает криптосистема *RSA* или криптосистема Эль-Гамала [1, 3]. Открытый ключ отсылается *Subscriber A*, который, в свою очередь, шифрует им сгенерированный секретный ключ для СКС. Зашифрованный ключ отправляется по открытому каналу *Subscriber B*. В качестве открытого канала используется внутрисетевой буфер обмена. В результате *Subscriber A* и *Subscriber B* имеют одинаковый секретный ключ для симметричного шифрования.

На третьем этапе осуществляется взаимодействие по защищенному каналу связи с использованием симметричной криптосистемы (рис. 2).

Таким образом, работа в команде при создании защищенного канала связи в лабораторном практикуме по дисциплине «Защита информации» имеет ряд особенностей и позволяет не только сформировать навыки работы в команде, но и стимулирует опережающую самостоятельную работу, формирует общую ответственность за результат, что весьма важно.

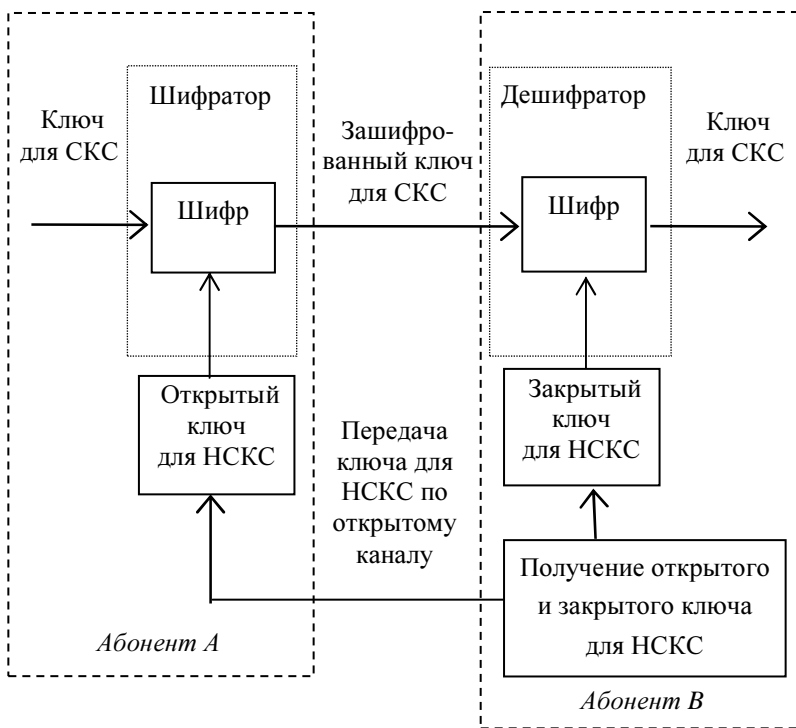


Рис. 1. Второй этап получения защищенного канала связи

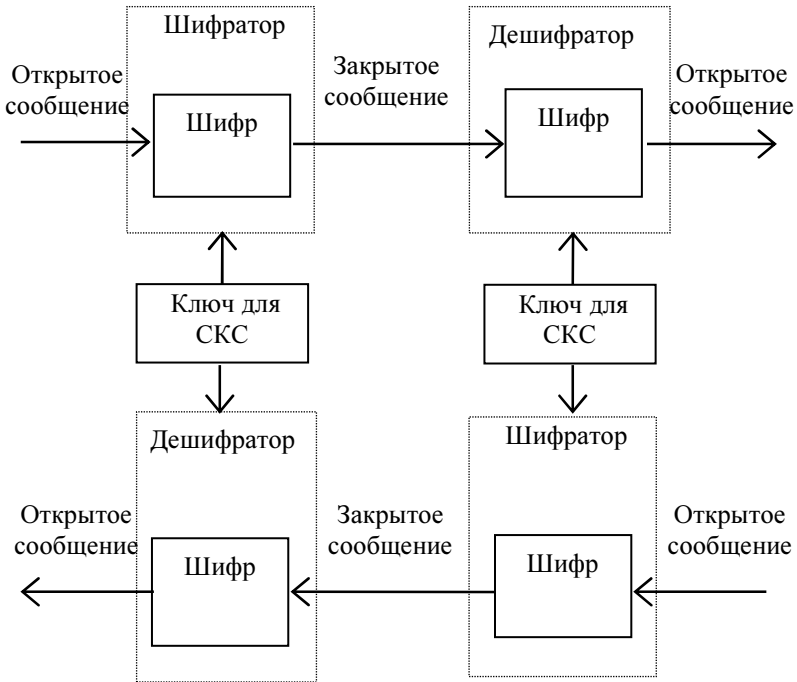


Рис. 2. Третий этап получения защищенного канала связи

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романец Ю.В. Защита информации в компьютерных системах и сетях / Ю.В. Романец, П.А.Тимофеев, В.Ф. Шаньгин; под ред. В.Ф. Шаньгина. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 2001. 376 с.
2. Постановление Правительства Российской Федерации № 957 «О лицензировании деятельности по техническому обслуживанию шифровальных (криптографических) средств» [Электронный ресурс]: сайт Центра по лицензированию, сертификации и защите государственной тайны ФСБ России. Режим доступа: <http://clsz.fsb.ru/docs/gov/957.htm> (дата обращения 11.05.2014).
3. Шаньгин В.Ф. Защита информации в компьютерных системах и сетях. М.: ДМК Пресс, 2012. 592 с.
4. ГОСТ 28147–89. Системы обработки информации. Защита криптографическая. Алгоритм криптографического преобразования. Введ. 01.07.1990. М.: ИПК Издво стандартов, 1996. 26 с.
5. Гусаров А.В. Об одном способе оценки параметров криптографических ключей / А.В. Гусаров, Н.И. Гусарова // Информационные системы и технологии. 2013. № 1. С. 124–128.

УДК 697.341

О. Ю. Марьясин, А. С. Колодкина*

Ярославский государственный технический университет

Россия, Ярославль, *e-mail: maryasinou@ystu.ru*,

*Ярославский промышленно-экономический колледж

Россия, Ярославль, *e-mail: anuta__25@mail.ru*

ПАКЕТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ HVAC СИСТЕМ И ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ ЗДАНИЙ

В работе рассмотрены популярные пакеты для моделирования HVAC систем и энергопотребления зданий. Данные пакеты могут использоваться при проектировании зданий и разработке систем управления инженерным оборудованием зданий.

Ключевые слова: HVAC, моделирование энергопотребления зданий, HAM, CAMPS, MATLAB, Simulink, Modelica.

O. Yu. Maryasin, A. S. Kolodkina*

Yaroslavl State Technical University

Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru

**Yaroslavl Industrial and Economical College,*

Russia, Yaroslavl, e-mail: anuta__25@mail.ru

PACKAGES FOR COMPUTER SIMULATION HVAC SYSTEMS AND ENERGY CONSUMPTION OF BUILDINGS

In this paper we reviewed the packages for modeling of HVAC systems and energy consumption of buildings. These packages can be used in the design of buildings and the development of building management systems.

Keywords: HVAC, Building Energy Modeling, HAM, CAMPS, MATLAB, Simulink, Modelica.

Разработка в течение более чем сорока лет программных инструментов моделирования систем отопления, вентиляции и кондиционирования (HVAC), моделирования энергопотребления зданий (Building Energy Modeling, BEM) и анализа энергетической эффективности зданий (Building Performance Simulation, BPS) привела к широкому спектру доступных в настоящее время продуктов [1]. Уже в 1972 г. появилась первая коммерче-

ская программа, созданная одним из крупнейших производителей оборудования HVAC систем – компанией TRANE. На сегодняшний день это целая индустрия, в которой участвуют и производители программного обеспечения, и производители оборудования, и фирмы, оказывающие специализированные услуги по моделированию, и, конечно, сфера образования, которая готовит таких специалистов [2].

Сайт Building Energy Software Tools Directory [3] содержит информацию более чем о четырехстах программных продуктах в области моделирования, тепловых и гидравлических расчетов HVAC систем, анализа энергетической эффективности зданий, возобновляемых источников энергии и т.д. В России в этом направлении сделано пока еще очень мало.

Инструменты моделирования, по сложности, развивались от простых электронных таблиц до продвинутых систем моделирования специального назначения, а по возможностям, от продуктов, которые учитывали только один аспект моделирования, к инструментам, которые интегрируют многочисленные аспекты при проектировании целого здания [4].

Анализ инструментов моделирования позволяет выделить следующие категории продуктов:

- Специализированные пакеты для моделирования HVAC систем и анализа энергетической эффективности зданий. Эти пакеты выполняют моделирование на основе системы дифференциальных и/или алгебраических уравнений, определяющих тепловые характеристики зданий и HVAC систем, в том числе с заданными стратегиями эксплуатации и управления. Здесь можно отметить системы Trane TRACE 700, Energy Plus, ESP-r, IDAICE, TRNSYS, HVACSIM+ и др.

- Инструменты на базе общих пакетов для научных и инженерных расчетов, таких как MATLAB (SIMBAD, Thermolib, HAMBASE, HAM-Tools и др.), пакетов для научных и инженерных расчетов, основанных на языке Modelica: Dymola, SimulationX, OpenModelica, JModelica и др.

Моделирование HVAC систем, как правило, включает и моделирование систем управления инженерным оборудованием. Многие инструменты являются эффективными для разработки и всестороннего тестирования систем управления в условиях моделирования, а некоторые из них также для тестирования и проверки системы управления в режиме реального времени.

Комбинированные модели переноса тепла и влаги в англоязычной литературе принято называть HAM (Heat, Air and Moisture) моделями, а комбинированные модели переноса тепла, влаги и газовых примесей в англоязычной литературе принято называть CHAMPS (Combined Heat, Air, Moisture and Pollutant Simulation) моделями [5].

Компьютерные модели должны достаточно реалистично моделировать динамику режимов здания, HVAC системы и системы управления. При этом могут быть использованы как адекватные аналитические и экспериментально-аналитические модели, так и более простые и точные эмпирические или нейросетевые модели [1].

Компьютерное моделирование может быть использовано для следующих целей[1]:

- для проверки энергетической эффективности всего здания, его подсистем и элементов;
- для обнаружения, анализа, поиска и/или предсказания проблем с системами и оборудованием в ходе эксплуатации;
- моделирования реакции здания и его HVAC системы на команды автоматизированной системы управления зданием (АСУЗ) или системы управления энергопотреблением здания (BEMS);
- разработки систем управления инженерным оборудованием здания, настройки средств контроля и управления;
- подготовки операторов АСУЗ и BEMS (тренажеры), имитацию аварийных ситуаций, для того чтобы понять, как АСУЗ или BEMS система справится с ними на практике.

Далее мы более подробно рассмотрим программные пакеты и библиотеки, которые авторы считают наиболее перспективными и которые позволяют решать широкий круг перечисленных выше задач.

EnergyPlus – это одна из старейших и известнейших программ для моделирования энергопотребления здания. EnergyPlus является свободно-доступным, с открытыми исходными кодами, кроссплатформенным приложением. EnergyPlus поддерживается организацией U.S. Department of Energy's (DOE) Building Technologies Office (BTO) [6].

EnergyPlus позволяет, на основании описания конструкции здания, материалов, связанных инженерных систем и т.д., рассчитать значение отопительных и холодильных нагрузок, необходимых для поддержания заданного теплового режима, потребление энергии основным оборудованием здания, а также многие другие детали моделирования, которые необходимы для проверки того, что моделирование выполнено так, как будет эксплуатироваться фактическое здание [6]. EnergyPlus использует сложные динамические комбинированные модели переноса тепла, влаги и газовых примесей (CO₂).

EnergyPlus не имеет графического интерфейса пользователя (GUI). Она предназначена для того, чтобы быть ядром системы моделирования. Входная и выходная информация программы представляет собой текстовые файлы в формате ASCII. Для удобства пользователей, работающих в среде ОС Windows, EnergyPlus включает дополнительные утилиты, кото-

рые помогают открыть редакторы для входных и выходных файлов, открыть табличный процессор или веб-браузер для просмотра файлов с результатами или запустить программу просмотра для выбранного графического файла.

Для редактирования входных файлов (IDF файлов) с данными, EnergyPlus включает IDF редактор, который позволяет упростить процесс создания или редактирования входных файлов EnergyPlus. Для еще более удобной работы с входными данными можно использовать программы от сторонних разработчиков, такие как EnergyPlugged, EP-GEO & EP-SYS и jEPlus, которые могут экспортировать данные в IDF-файл [6].

Для ввода данных о конструкции здания в EnergyPlus можно использовать 3D-модели зданий, например, подготовленные в известном 3D-редакторе SketchUp [7]. Для связи с EnergyPlus в SketchUp необходимо установить свободно-доступный Legacy OpenStudio SketchUp Plug-in, который позволяет легко создавать и редактировать 3D-модели зданий по информации из IDF-файлов. Этот plug-in также позволяет запускать EnergyPlus и просматривать результаты моделирования, не покидая 3D-редактор, как показано на рис. 1.

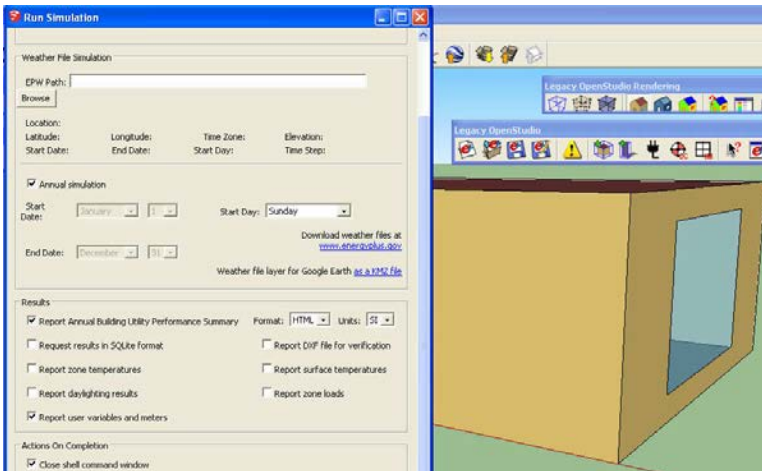


Рис. 1. Запуск EnergyPlus из SketchUp

Для удобства работы с EnergyPlus сторонними разработчиками разработаны приложения, реализующие графический интерфейс к EnergyPlus. Это свободно доступные программы OpenStudio, Veopt и коммерческие системы DesignBuilder, EFEN, Hvacomp Simulator V8i, N++ и др. [6].

Для связи EnergyPlus с другими системами компьютерного моделирования может использоваться Building Controls Virtual Test Bed (BCVTB) [8]. BCVTB – это java-приложение, позволяющее проводить совместное моделирование и обмениваться данными между пакетами: EnergyPlus, TRNSYS, MATLAB/Simulink, пакетами, основанными на языке Modelica (Dymola) и др.

Для связи EnergyPlus с MATLAB и Simulink может также использоваться Toolbox MLE+ [9]. Использование таких продуктов, как BCVTB и MLE+, позволяет проводить комплексное моделирование здания, включая модели HVAC систем и систем управления инженерным оборудованием.

Система **TRNSYS** является мощной, коммерческой средой моделирования HVAC систем [10]. Она используется инженерами и исследователями по всему миру на протяжении более чем 35 лет для проверки новых энергетических проектов, от простых бытовых систем горячего водоснабжения до проектирования и моделирования зданий и их инженерного оборудования, включая системы управления, поведение жильцов, альтернативные источники энергии (солнца, ветра, фотоэлектрические) и т.д.

Система TRNSYS имеет открытую, модульную структуру, что позволяет пользователям и сторонним разработчикам легко добавлять пользовательские модели компонентов, используя любые универсальные языки программирования (C, C++, Pascal и т.д.). TRNSYS может легко обмениваться данными со многими другими приложениями с помощью интерактивных вызовов во время моделирования (Microsoft Excel, MATLAB, COMIS и т.д.).

Среда TRNSYS Simulation Studio позволяет создавать проекты, перетаскивая компоненты в рабочую область, соединяя их между собой и задавая параметры моделирования (рис. 2).

TRNSYS используется для многих приложений, включающих:

- многозонные здания, с учетом их конструктивных особенностей и графиков нагрузки (естественная вентиляция, отопление/охлаждение, двойной фасад и т.д.);
- солнечные системы (солнечные коллекторы и фотоэлектрические панели);
- HVAC системы, возобновляемые энергетические системы и т.д.

Система **MATLAB** представляет собой коммерческую среду, предназначенную для выполнения инженерных и научных расчетов и ориентированную на работу с массивами данных [11]. Одним из важных достоинств MATLAB является возможность расширения для решения новых научно-технических задач. Это достигается за счет создания пакетов расширения (Toolboxes), ориентированных на конкретные и практически полезные приложения.

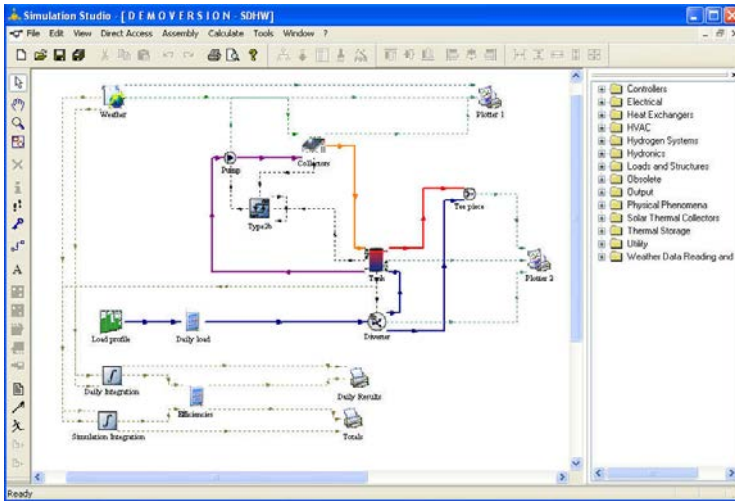


Рис. 2. TRNSYS Simulation Studio

Система **Simulink** пакета MATLAB, реализуя принцип визуального программирования, позволяет построить схему сложной системы из одних функциональных блоков, не написав при этом ни строчки кода. Система Simulink обладает широкими возможностями по организации визуального моделирования систем, анализа динамики систем во времени, связей со средой MATLAB и другим инструментарием пакета MATLAB, моделирования событий и ситуаций, возникающих при эксплуатации технической системы.

Перечислим наиболее известные инструменты моделирования энергопотребления зданий и HVAC систем на основе MATLAB:

SIMBAD – коммерческая библиотека для MATLAB/Simulink [13]. Реализует HAM модель и может использоваться для создания многозонных моделей зданий, с учетом их конструктивных особенностей и графиков нагрузки. Включает модели сетей трубопроводов/воздуховодов, элементов HVAC систем и многое другое.

Thermolib – мощная коммерческая библиотека MATLAB/Simulink для моделирования термодинамических систем [14]. Может использоваться для создания HAM моделей. Включает некоторые модели элементов HVAC систем.

HAMBASE – свободно-доступная библиотека для MATLAB [15]. Также реализует HAM модель и может использоваться для создания многозонных моделей зданий, с учетом их конструктивных особенностей и

графиков нагрузки. Библиотека выполнена на языке MATLAB, а использование в Simulink возможно через механизм S-функций.

HAM-Tools (IBPT) – свободно-доступная библиотека для Simulink [16]. Имеет возможности близкие к HAMBASE. Система выполнена полностью на Simulink, но у нее есть проблемы совместимости с последними версиями MATLAB. Пример HAM модели помещения, выполненной с использованием HAM-Tools, показан на рис. 3.

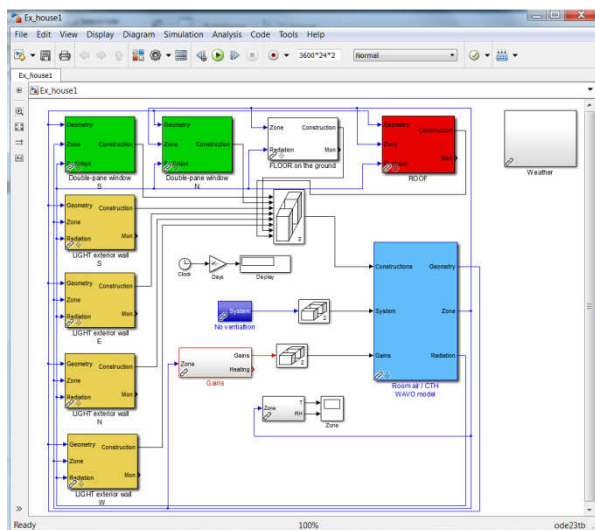


Рис. 3. HAM-Tools

В современных версиях пакета MATLAB система Simulink содержит новое средство моделирования физических систем SimScare [17]. SimScare позволяет создавать модели с использованием механических, электрических, гидравлических и других компонент, как и в системах на базе языка Modelica. Компоненты SimScare можно комбинировать с обычными блоками Simulink. На текущий момент авторам неизвестна какая-то библиотека для Simulink, по рассмотренной в данной статье тематике, использующая компоненты SimScare.

Авторами было принято решение создать комплекс моделей, включающий модели переноса тепла и влаги в помещении, модели основных элементов систем отопления и вентиляции (HVAC систем), модели элементов систем управления зданиями [18]. Из этих элементов, как из кирпичиков, могут быть построены модели более крупных узлов систем ото-

пления, модели тепловых пунктов, систем горячего водоснабжения и вентиляции целого здания.

Modelica – это объектно-ориентированный, декларативный язык моделирования для компонентно-ориентированного моделирования сложных физических систем, в частности, систем, содержащих механические, электрические, электронные, гидравлические, тепловые компоненты, а также компонентов систем управления и других. Modelica поддерживается некоммерческой организацией Modelica Association [19].

Существует множество как коммерческих (Dymola, Simulation X, MapleSim, Wolfram System Modeler и др.), так и бесплатных систем моделирования, основанных на языке Modelica (JModelica, Open Modelica). На данный момент на базе Modelica создано большое количество различных библиотек, не считая стандартной библиотеки Modelica Standard Library, большинство из которых является свободно-доступными [19]. Существуют также библиотеки, предназначенные для моделирования систем энергообеспечения здания, HVAC систем и их систем управления. Это библиотеки Buildings, Building Systems, BuildSysPro и др. На рис. 4 показан пример моделирования с использованием библиотеки Buildings.

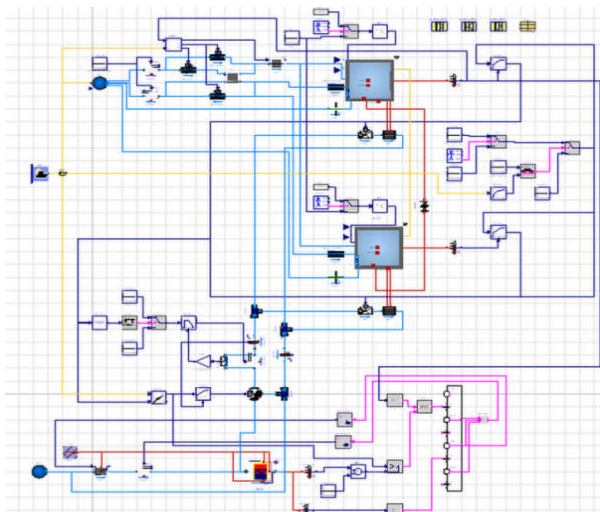


Рис. 4. Пример с использованием библиотеки Buildings

К сожалению, в России системы, основанные на языке Modelica, пока еще не очень известны. Существуют также проблемы совместимости

моделей, созданных в различных системах моделирования. Кроме того, большие библиотеки моделей, такие как Buildings, ориентированы, прежде всего, на коммерческие системы моделирования (Dymola) и пока слабо поддерживаются бесплатными продуктами.

В табл. 1 приведены некоторые сравнительные характеристики различных систем и библиотек моделирования, рассмотренных в данной статье. Для обмена информацией между различными системами моделирования и проведения совместного моделирования в последнее время все шире начинает использоваться программный интерфейс FMI (Functional Mock-up Interface).

Таблица 1. Характеристики различных систем и библиотек моделирования

Характеристика	Системы моделирования							
	EnergyPlus	TRNSYS	SIMBAD	Thermolib	HAMBASE	HAM-Tools	Buildings	Авторская
Свободно-доступная система	+	-	-	-	+	+	+	-
НАМ модель	+	+	+	+	+	+	+	+
CHAMPS модель	+	+	-	+	-	-	+	-
3D-редактор конструкции здания	+ ¹⁾	+ ¹⁾	-	-	-	-	-	-
Данные материалов конструкции здания	+	+	+	-	+	+	-	-
Графики нагрузок	+	+	+	+	+	+	+	+
Погодные данные	+	+	+	-	+	+	-	-
Графический интерфейс	- ²⁾	+	+	+	+	+	+	+
Связь с MATLAB/ Simulink	+ ³⁾	+	+	+	+	+	+ ⁴⁾	+
Связь с Modelica	+ ⁴⁾	+ ⁴⁾	+ ⁴⁾	+ ⁴⁾	+ ⁴⁾	+ ⁴⁾	+	+ ⁴⁾
Элементы HVAC систем	-	+	+	-	-	-	+	+
Элементы систем управления	-	+	+	+	+	+	+	+

Примечание: 1) 3D-редактор SketchUp; 2) Через сторонние приложения; 3) Через BCVTB и MLE+; 4) Через BCVTB и FMI.

Представленный в данной статье обзор систем моделирования HVAC систем и анализа энергетической эффективности зданий не претендует на полноту и отражает личную точку зрения авторов. В него включены только те продукты, с которыми авторы знакомы по рабочим или демонстрационным версиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trcka M.* Overview of HVAC system simulation / M. Trcka, J. L. M. Hensen // *Automation in Constructio.* 2010. Vol. 19, no. 2. P. 93–99.
2. *Герасимов Н.А.* Моделирование энергопотребления зданий - краеугольный камень зеленого проектирования для инженеров // *Энергосбережение.* 2014. № 4. С. 28–33.
3. Building Energy Software Tools [Электронный ресурс]. URL: <http://www.buildingenergysoftwaretools.com/home>(дата обращения 17.09.2016)
4. *Clarke J.A.* Energy Simulation in Building Design, Second edition, Butterworth-Heinemann, UK, 2001. 362 p.
5. *Zhang J.S.* Combined heat, air moisture and pollutant simulations (CHAMPS) for buildings / J.S. Zhang, M.H. Qin // *BuildingSimulation.* 2011. 4. P. 279-282.
6. EnergyPlus [Электронный ресурс]. URL: <https://energyplus.net/> (дата обращения 17.09.2016)
7. SketchUp [Электронный ресурс]. URL:<http://www.sketchup.com/> (дата обращения 17.09.2016)
8. FrontPage – bcvtb [Электронный ресурс]. URL:<http://simulationresearch.lbl.gov/bcvtb/>(дата обращения 17.09.2016)
9. GitHub - mlab-upenn/mlep_v1.1: MLE+ Version 1.1 [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/mlab-upenn/mlep_v1.1(дата обращения 17.09.2016)
10. TRNSYS : Transient System Simulation Tool [Электронный ресурс]. URL: <http://www.trnsys.com/>(дата обращения 17.09.2016)
11. MATLAB – MathWorks [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mathworks.com/products/matlab/> (дата обращения 17.09.2016)
12. SIMBAD Building and HVAC toolbox [Электронный ресурс]. URL: <http://www.simbad-cstb.fr/index.html>(дата обращения 17.09.2016)
13. Thermolib [Электронный ресурс]. URL: <https://www.thermolib.de/> (дата обращения 17.09.2016)
14. Hamlab – Bpwiki [Электронный ресурс]. URL: <http://archbps1.campus.tue.nl/bpwiki/index.php/Hamlab> (дата обращения 17.09.2016)
15. ibpt.org [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ibpt.org/> (дата обращения 17.09.2016)
16. Physical Systems Simulation – Simscape [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mathworks.com/products/simscape/> (дата обращения 17.09.2016)
17. Колодкина А.С. Компьютерное моделирование энергоэффективных алгоритмов управления теплоснабжением зданий / А.С. Колодкина, О.Ю. Марьясин. // Сб. тр. XXVII Международ. науч. конф. “Математические методы в технике и технологиях ММТТ-27”. Т. 5. Тамбов: Тамбов. гос. техн. ун-т, 2014. 104 с.
18. Modelica and the Modelica Association [Электронный ресурс]. URL: <https://modelica.org/> (дата обращения 17.09.2016)

УДК 004.032.26

В. В. Швыров, В. Н. Шишлакова, Д. А. Капустин

Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко
г. Луганск, e-mail: slsh@i.ua

НЕЙРОННЫЕ СЕТИ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ ДОКУМЕНТОВ И АВТОМАТИЗАЦИИ ДОКУМЕНТООБОРОТА КАФЕДРЫ

Представлена разработка математической модели для классификации документов с использованием нейронных сетей на основании метаанных документов и ключевых слов документа.

Ключевые слова: автоматизация документооборота, векторная модель, нейронные сети, Statistica

V. V. Shvyrov, V. N. Shishlakova, D. A. Kapustin

*Luhgansk Taras Shevchenko National University
Luhgansk, e-mail: slsh@i.ua*

NEURAL NETS IN CLASSIFICATION OF DOCUMENT AND AUTOMATIZATION FLOW OF DOCUMENT PROCESS OF THE EDUCATIONAL DEPARTMENT (CHAIR)

We construct mathematical model for classification of documents with the use of ANN based on meta information of document's and documents key words.

Keywords: automatization of flow documents, vector model, neural net, Statistica.

1. Введение. Задача автоматизации документооборота в последние годы становится все более актуальной, в частности, и для предприятий малого и среднего звена, библиотек, вузов и т.д. Так, для библиотек классификацию текстов на естественном языке называют рубрицированием. В корпоративном сегменте часто используются специализированные ERM решения, которые весьма дороги и не учитывают специфику задач, возникающих на кафедре или в деканате. Для вузов задачи классификации документации стоят особо остро в связи с общей тенденцией информатизации и перевода всех документов в электронный вид.

Если рассматривать отдельно взятую кафедру, то за определенный период работы накапливается огромный массив документации самого разного характера: отчеты преподавателей, рабочие программы, практические

работы, лабораторные работы, годовые отчеты, методические разработки, результаты работы различных комиссий и т.п.

Если процесс хранения документов не был своевременно должным образом организован, то процесс поиска нужной информации может занимать достаточно длительное время. Задача классификации может возникнуть и в случае краха сервера, когда после восстановления база документов может представлять собой тысячи пронумерованных файлов.

Целью данной работы является разработка нейросетевой модели для автоматизированной классификации документов по категориям с использованием статистических и семантических характеристик документации. Заметим, что в отличие от общей задачи классификации текстов в данной работе исследуется специфика и категории документов, характерные для кафедр ВУЗов информационного и технического профиля.

За последние годы появилось достаточно много работ, связанных с классификацией документов и текстов. Так, в работе [1] выделяют такие категории классификаторов документов: статистические, классификаторы на основе нейронных сетей, классификаторы на функциях подобия. Детальный обзор методов автоматической классификации текстовых документов приводится в работе [4], учет специфики и формальных метаданных затронут в работе [5], классификация на основе латентно-семантического анализа рассмотрена в работе [7].

Тематика нейронных сетей и их применения в различных сферах также чрезвычайно актуальна, стоит особо отметить монографию Хайкина [9].

Математическая модель нейрона может быть представлена следующей схемой (рис. 1), где $v_k = \sum_{j=1}^m w_{kj}x_j + b_k$, $y_k = \varphi(v_k)$.

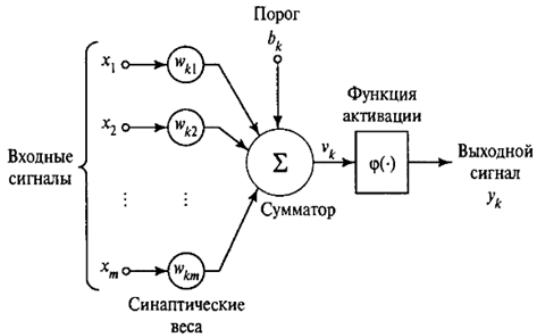


Рис. 1. Математическая модель нейрона

Типичная структура нейронной сети обычно содержит три слоя – входной, слой скрытых нейронов и выходной слой (рис. 2).

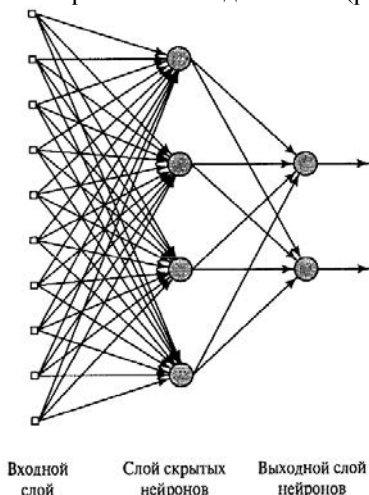


Рис. 2. Общая схема нейронной сети

2. Разработка статистико-семантической модели. Простейшие модели поиска и классификации документов в основном построены на дескрипторах, т.е. наборе терминов и описаний, которые характерны для определенной категории документов. Достаточно широко, при поиске в сети интернет, используются модели поиска и классификации, основанные на Дублинском ядре. Метаданные Дублинского ядра состоят из 15 элементов: название, создатель, тема, описание, издатель, внесший вклад, дата, тип, формат, идентификатор, источник, язык, отношения, покрытие, авторские права.

Для выполнения классификации мы будем рассматривать комбинированный подход. Прежде всего определим понятие статистико-семантической модели. Будем рассматривать набор параметров и характеристик конкретного документа в совокупности с набором терминов и оценок отклонений попадания в заданный диапазон значений для конкретной категории документов.

Классификации документов по найденным характеристикам будет выполняться с помощью нейронных сетей. Таким образом, для решения задачи необходимо выделить информационные категории документов и ряд параметров, по которым будет выполняться классификация. Затем следует подготовить выборки для обучения нейронной сети и произвести отбор сети с наилучшими показателями с использованием приложения Statistica.

Среда Statistica позволяет генерировать код нейронной сети на пространственных языках программирования (C#, C++), что дает возможность создания автономного приложения для классификации документов и тем самым решает проблему автоматизации.

Анализ кафедральной документации и требований к УМКД в целом позволил выделить следующие категории документов, которые используются непосредственно в учебном процессе преподавателя:

- рабочая программа;
- лабораторная работа;
- практическая работа;
- контрольная работа;
- лекция;
- задания к самостоятельной работе;
- список публикаций (литературы);
- статья;
- отчет;
- план работы.

Выделим ключевые характеристики документов, которые могут быть получены программным путем при автоматической обработке документа, например с помощью макроса:

- размер файла;
- количество ключевых слов в названии файла;
- количество страниц;
- количество таблиц;
- количество рисунков;
- относительная частота по ключевым словам категории;
- количество слов.

Для каждой категории необходимо сформировать семантическое ядро, которое представляет собой набор слов и словосочетаний, характерных для данной категории документации (рис. 3-4).

Например, для рабочей программы по дисциплине «Компьютерная дискретная математика» (на украинском языке) семантическое ядро имеет вид (см. рис. 3).

Семантическое ядро

Фраза/слово	Количество	Частота, %
дисципліни	17	1.20
тема	17	1.20
основні	16	1.13
математика	13	0.92
представлення	13	0.92
комп	11	0.78
роботи	10	0.71
теорії	10	0.71
http	9	0.63
завдання	9	0.63
мир	9	0.63
ектів	9	0.63
алгоритм	8	0.56

Рис. 3. Семантическое ядро

Для технических дисциплин, связанных с программированием, характерно наличие большого числа специальных терминов.

Фраза/слово	Количество	Частота, %
захист	13	1.41
інформації	12	1.30
система	11	1.19
дисципліни	10	1.08
основні	10	1.08

Рис. 4. Семантическое ядро рабочей программы по дисциплине «Защита информации в компьютерных системах»

Анализ типичных рабочих программ для различных учебных дисциплин позволил сделать вывод, что наибольшую частоту имеют специальные термины, связанные с конкретной дисциплиной. Поскольку нас интересуют слова с наибольшими частотами, но не являющиеся терминами, то в качестве параметра для нейронной сети будем использовать слова «Дисциплины». Подобный анализ выполняется для каждой категории, которая будет использоваться как категориальная переменная при классификации.

Поскольку нейронные сети в качестве входа получают вектор действительных чисел, то при построении модели будем использовать векторный подход, а в качестве компонент вектора указывать метаданные документов, данные по частотам ключевых слов, полученные при построении семантического ядра, весовые коэффициенты.

Таким образом, сформулируем задачу в общем случае для произвольного числа категорий. Пусть имеется конечное множество документов M , $M = \bigcup_{i=1}^k M_i$, где k - количество категорий и пусть $m_j \in M_i \subseteq M, j = 1, \dots, |M_i|$ - произвольный документ категории i . Тогда документу m_j , можно однозначно сопоставить вектор характеристик $\bar{m}_j = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in N^0$ - значения, полученные при обработке файла. Определим для каждого значения $a_l, l = 1, \dots, n$, весовой коэффициент $\alpha_l, 0 < \alpha_l < 1$, который необходим для определения степени важности данного показателя при анализе.

Далее для каждого показателя a_l относительных величин и категории документов M_j определим интервал $(p_j^l, q_j^l) \subset (0, 1)$

Аналогично зададим интервал для абсолютных показателей $(p_j^l, q_j^l) \subset (0, T), T \in N$.

Определим центры интервалов $c_j = \frac{p_j - q_j}{2}$ и отклонение $\sigma_j = \frac{|c_j - a_j|}{|q_j - c_j|}$.

Поясним значение показателя σ_j на примере.

Допустим размер файла 250 kb. Для категории «Рабочая программа» задан интервал (100, 500), т.е. размер файла с рабочей программой может быть в интервале от 100 до 500 kb. Центр интервала $c_j = 300$ kb, значение

$$\sigma_j = \frac{|250 - 300|}{500 - 300} = 0,25, \text{ что лежит в пределах нормального распределения.}$$

Это говорит о том, что документ с вероятностью $(1 - 0,25) \cdot 100 = 75\%$ будет относиться к категории «Рабочая программа» по показателю «Размер файла» (но в то же время он может относиться и к другим категориям).

В целом для всех категорий M_i будет сформирован вектор $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$. Наконец, в результате анализа всех характеристик файла результирующий вектор будет иметь вид

$$r = (a_1, \dots, a_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \sigma^s, \alpha^s),$$

где σ^s, α^s - среднее арифметическое.

Значения границ интервалов для терминов по категориям также могут быть получены при построении семантического ядра конкретной категории.

3. Построение нейронной сети в программе Statistica. Рассмотрим основные этапы создания нейронной сети для решения задачи классификации.

1. На основании данных полученных при индексации базы обрабатываемых документов и данных семантического ядра категорий документов создадим обучающую и контрольную выборки в виде рабочего листа с данными. Для построения нейронной сети будем использовать приложение Statistica и руководство [2].

2. Введем данные о типах переменных, укажем категориальные переменные и переменные данных.

3. Зададим параметры для обучающей и контрольной выборки (рис. 5).

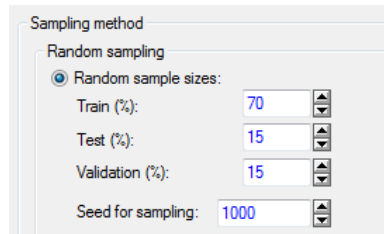


Рис. 5. Параметры выборок

4. Зададим параметры построения нейронных сетей (рис. 6). Будем использовать стандартную схему нейронной сети с тремя слоями: входным, скрытым и выходным. На данном этапе необходимо указать количество нейронов в скрытом слое (минимальное и максимальное значения), задать функции активации, количество сетей для тестирования.

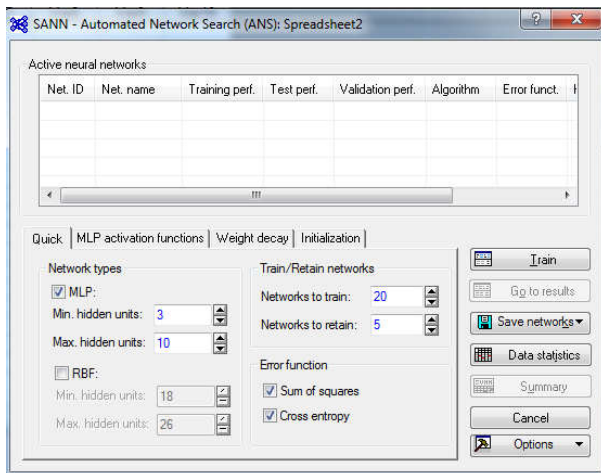


Рис. 6. Настройка параметров нейронной сети

В качестве функции активации для задач классификации используют логистическую функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}};$$

и гиперболический тангенс

$$\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

Эти функции выбираются как для скрытого слоя нейронов, так и для выходного слоя.

5. После настройки сети выполняем процесс обучения сети на основе входных данных. При большом количестве параметров процесс обучения может быть достаточно продолжительным.

6. После построения нейронных сетей оцениваем показатели эффективности сети.

Выводы. В работе представлена разработка математической модели с использованием семантического ядра для различных категорий кафедр

ральных учебных документов, метаданных документа, частотных характеристик. Намечены основные шаги построения нейронной сети для классификации документов. В дальнейшем планируется реализация разработанной модели на примере создания конкретной нейронной сети для классификации документов и ее тестирование на базе кафедры информационных технологий и систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Модели и методы автоматической классификации текстовых документов / А.М. Андреев, Д.В. Березкин, В.В. Сюзев, В.И. Шабанов // Вестн. МГТУ. Сер. Приборостроение. М.: Изд-во МГТУ. 2003. №3.
2. *Боровиков В.* STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. 2-е изд. СПб.: Питер, 2003. 688 с.
3. *Дубинский А.Г.* Некоторые вопросы применения векторной модели представления документов в информационном поиске // Управляющие системы и машины. 2001. № 4. С. 77-83.
4. *Епрев А.С.* Автоматическая классификация текстовых документов // Математические структуры и моделирование. 2010. Вып. 21. С. 65-81.
5. *Королев И.Д.* Подходы к оперативной идентификации формализованных электронных документов в автоматизированных делопроизводствах [Электронный ресурс] / И.Д. Королев, С.В. Носенко // Политемаг. сетевой электрон. науч. журн. Кубан. гос. аграр. ун-та (Науч. журнал КубГАУ) Краснодар: КубГАУ, 2013. № 08(092). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/08/pdf/74.pdf>
6. *Круглов В.В.* Искусственные нейронные сети. Теория и практика / В.В. Круглов, В.В. Борисов. М.: Горячая линия – Телеком, 2001.
7. *Кураленок И. А.* Автоматическая классификация документов на основе латентно-семантического анализа / И.А. Кураленок, И.С. Некрестьянов // Программирование. 2000. N.4. С. 31-41.
8. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика. 2002. 344 с.
9. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс: пер. с англ. Издат. дом. Вильямс, 2008. 1103 с.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК628.4.045

**Н. С. Лукьянова, Н. Л. Маркелова, С. Д. Тимрот,
В. Н. Казин *, А. Ю. Бухалова**

Ярославский государственный технический университет,
*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: ngurileva@yandex.ru

ТОКСИКОЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕРАБОТКИ ТЯЖЕЛЫХ НЕФТЯНЫХ ОТХОДОВ

В статье рассмотрена проблема накопления тяжелых нефтесодержащих отходов. Предложен метод их переработки, позволяющий снизить класс опасности сырья и получить дешевый продукт, отвечающий требованиям стандартов.

Ключевые слова: *тяжелые нефтесодержащие отходы, битумные пасты, биотестирование, класс опасности.*

**N. S. Lukyanova, N. L. Markelova, S. D. Timrot,
V. N. Kazin*, A. Y. Buhalova**

*Yaroslavl State Technical University,
*Yaroslavl State University P.G. Demidov
Russia, Yaroslavl, e-mail: ngurileva@yandex.ru*

TOXICOLOGICAL SUBSTANTIATION PROCESS OF HEAVY OIL WASTE PROCESSING

In the article the problem of accumulation of heavy oil-containing waste is considered. A method of processing, which allows to reduce the danger of raw material class and get a cheap product that meets the standards.

Keywords: *heavy oily waste, bitumen paste, biological testing, the hazard class.*

Проблема образования, размещения, утилизации, захоронения отходов является достаточно многоплановой, охватывающей все отрасли материального производства, сферы услуг и быта, тесно связана с решением проблем охраны окружающей среды и рационального использования материально-сырьевых ресурсов. Вместе с тем, эта проблема имеет свои особенности и потому утвердилась как в России, так и за рубежом в качестве

самостоятельной хозяйственной задачи, требующей для своего решения специфического подхода.

В результате производственной деятельности при добыче, транспортировке и переработке нефти-сырца образуются тяжелые нефтесодержащие отходы (ТНО), которые постоянно накапливаются [1].

ТНО представляют значительную опасность для природной среды в городах и пригородах, являясь потенциальным источником загрязнения почв, грунтов, грунтовых и поверхностных вод.

Для определения токсичности и класса опасности ТНО, а также продуктов, полученных с их использованием, был применён метод биотестирования. Оценка острой токсичности осуществлялась на следующих тест-организмах: цериодафниях вида *Ceriodaphnia affinis* и водорослях вида *Scenedesmus quadricauda (Turp) Breb.*

Исследования проводились в соответствии с нормативной документацией [2, 3]. Для оценки токсичности продуктов, полученных на основе вторичных материальных ресурсов, использовали методики [4, 5]. Работа проводилась совместно с кафедрой общей и биоорганической химии Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Экспериментальный метод отнесения отходов к классу опасности основан на биотестировании водной вытяжки отходов. Методика основана на определении смертности тест-организмов при воздействии токсических веществ, присутствующих в исследуемой водной среде (в данном случае в водных вытяжках из образцов ТНО) по сравнению с контрольной культурой в пробах, не содержащих токсических веществ (контроль). Острое токсическое действие исследуемой водной вытяжки из ТНО определяется по смертности (летальности) тест-организмов за определённый период экспозиции. Критерием острой токсичности служит гибель 50 % и более тест-организмов за 48 часов в исследуемой водной вытяжке при условии, что в контроле гибель не превышает 10 %. В экспериментах по определению острого токсического действия устанавливают:

1. Среднюю летальную концентрацию вытяжки, вызывающую гибель 50% и более тест-организмов (ЛК₅₀, ЛКР₅₀).

2. Безвредную (не вызывающую эффекта острой токсичности) концентрацию водной вытяжки отходов, вызывающую гибель не более 10 % тест-организмов (БК₁₀₋₁₈, БКР₁₀₋₁₈).

Для определения острого токсического действия проводится биотестирование исходной водной вытяжки из проб и нескольких их разбавлений по смертности дафний. Исследуется исходный раствор и 4 разведения (1:10; 1:100; 1:1000; 1:10000). Класс опасности устанавливался по кратности разведения водной вытяжки, при которой не было выявлено воздействие на гидробионтов в соответствии с диапазонами кратности разведения [2].

В табл. 1 и 2 представлены результаты биотестирования ТНО на различных тест-организмах.

Таблица 1. Выживаемость цериодафний в водной вытяжке ТНО

Показатель	Номер опыта	Концентрация водной вытяжки в пробе, % (разбавление)				
		100	10 (10)	1 (100)	0,1 (1000)	0,01 (10000)
Количество выживших цериодафний (из 10 особей)	1	0	1	3	10	10
	2	0	0	2	9	10
	3	0	1	2	7	9
Среднее значение выживаемости		0	0,6	2,3	8,6	9,6

Таблица 2. Выживаемость одноклеточных водорослей в водной вытяжке ТНО

Показатель	Номер опыта	Концентрация водной вытяжки в пробе, % (разбавление)				
		100	10 (10)	1 (100)	0,1 (1000)	0,01 (10000)
Количество выживших одноклеточных водорослей *10 ³ кл/см ³	1	20	32	80	85	108
	2	19	29	75	78	109
	3	32	36	78	79	105
Среднее значение выживаемости		23,6	32,3	77,6	80,6	107,3

Для построения диаграммы и проведения расчетов степени токсичности необходимо вычислить средний процент смертности (А, %).

Результаты определения острой токсичности водной вытяжки ТНО на тест-организме *Ceriodaphnia affinis* представлены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты определения острой токсичности водной вытяжки ТНО на тест-организме вида *Ceriodaphnia affinis*

Концентрация водной вытяжки в пробе, %	Десятичный логарифм концентрации	Смертность цериодафний в опыте, % к контролю	Значение пробита для экспериментально установленной гибели цериодафний	Оценка качества водной среды	
				ЛКР ₅₀	БКР ₁₀
100	2	100	7,33	158	3333
10	1	94	6,55		
1	0	77	5,74		
0,1	-1	14	3,92		
0,01	-2	4	3,25		

На основании полученных значений строим график (рис. 1).

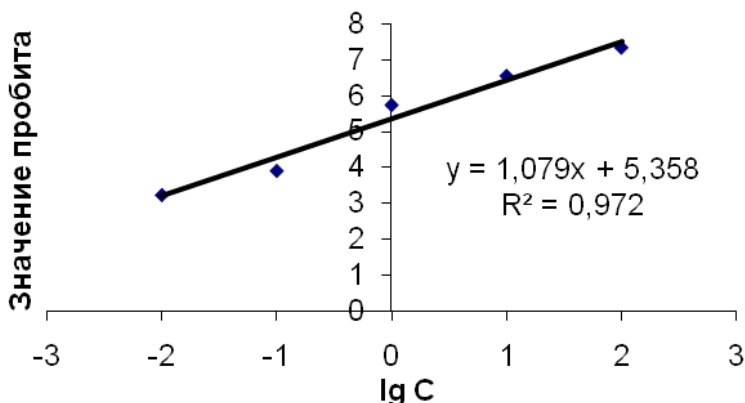


Рис. 1. Зависимость гибели дафний от концентрации водной вытяжки ТНО

Пробитное значение 3,72 соответствует $LgC = -1,5$.

$BK_{10} = 0,03\%$ -концентрация, вызывающая гибель не более 10 % тест-объекта.

$BKP_{10} = 3333$.

Гибель не более 10 % тест-объектов происходит при разведении в 3333 раз, таким образом, класс опасности ТНО - 2.

Определение токсичности на одноклеточной водоросли ведем исходя из методики [3] (табл. 4), показатели LKP_{50} , BKP_{20} рассчитываем аналогично как в случае с тест-организмом вида *Ceriodaphnia affinis*.

Таблица 4. Результаты определения острой токсичности водной вытяжки ТНО на тест-организме вида *Scenedesmus quadricauda (Turp) Breb*

Концентрация водной вытяжки в пробе, %	Десятичный логарифм концентрации	Смертность одноклеточных водорослей в опыте, % к контролю	Значение пробита для экспериментально установленной гибели водорослей	Оценка качества водной среды	
				LKP_{50}	BKP_{20}
100	2	88	6,18	89	4000
10	1	70	5,52		
1	0	53	5,08		
0,1	-1	21	4,19		
0,01	-2	11	3,77		

В сводной табл. 5 представлены результаты биотестирования на различных тест-организмах.

Таблица 5. Результаты биотестирования ТНО

Отход	Тест-организм вида <i>Ceriodaphnia affinis</i>		Тест-организм вида <i>Scenedesmus quadricauda</i> (Turp) Breb		Класс опасности
	*ЛКР ₅₀	*БКР ₁₀	*ЛКР ₅₀	*БКР ₂₀	
ТНО	158	3333	89	4000	2

* ЛКР₅₀ – летальная кратность разбавления, БКР₁₀, БКР₂₀ – безопасная кратность разбавления.

Таким образом, по результатам экспериментального метода, с помощью биотестирования, было установлено, что тяжелый нефтесодержащий отход относится ко 2 классу опасности - высоко опасный. Захоронение таких отходов приводит к опасному загрязнению окружающей природной среды. Период восстановления нарушенных экосистем не менее 10 лет после снижения вредного воздействия от существующего источника [6].

На сегодняшний день большинство ТНО не утилизируются, а складываются в прудах-шламонакопителях, что негативно влияет на флору и фауну окружающей среды.

Наиболее перспективным на наш взгляд является использование ТНО в качестве твердого эмульгатора для производства битумных паст, поскольку данная технология позволяет избежать обезвоживания ТНО – энергоемкой стадии процесса.

Физико-химическими предпосылками данного направления использования отхода является следующее:

1. В органической части ТНО содержится достаточно большое количество асфальтенов (11,5 % мас.), а как известно из литературных данных, асфальтены играют основную роль в стабилизации водонефтяных эмульсий.

Г. Н. Позднышев в своей работе показал, что в стабилизации промысловых эмульсий Ромашкинского месторождения основную роль наряду с асфальтенами играют парафиновые углеводороды [7], которые также содержатся в органической части в исследуемого отхода.

2. Второй важнейшей предпосылкой является высокая дисперсность ТНО. Традиционно в качестве твердых эмульгаторов в производстве битумных паст используются высокодисперсные неорганические материалы: глина, окислы кремния, карбонат кальция и сульфат бария.

Таким образом, в ТНО содержится два вида эмульгаторов: органические в виде асфальтенов и органических кислот и неорганический, в виде высокодисперсных минеральных компонентов.

Битумные пасты используются для поверхностной обработки дорожных покрытий, устройства слоев сцепления, заполнения деформационных швов, герметизации трещин в асфальтобетонном покрытии, также их применяют для гидроизоляции зданий и сооружений.

На основе приготовленных битумных паст была получена партия образцов теплого песчаного асфальтобетона марки «Д». Образцы асфальтобетона были приготовлены в соответствии с требованием ГОСТ 12801-98.

Приготовленные образцы асфальтобетона, имеют следующий состав:

- песок – 70%;
- минеральный порошок – 30%;
- битумная паста – 20% (сверх минеральной части). В пересчете на битум – 6,2%.

Традиционно количество битума в асфальтобетонных композициях типа «Д» составляет 6-9% [8].

Показатели асфальтобетонов соответствуют требованиям не только для органоминеральных смесей ГОСТ 30491-97, но и более жестким требованиям для верхнего слоя плотного асфальтобетона ГОСТ-9128-97.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о возможности эффективного использования крупнотоннажного опасного отхода нефтеперерабатывающих производств для получения полезного продукта, имеющего потребительский спрос на рынке товаров и услуг.

Токсичность полученных асфальтобетонов оценивали с помощью биотестирования водных вытяжек продуктов на тест-организме вида *Ceriodaphnia affinis*.

В табл. 6 и 7 представлены результаты определения острой токсичности водной вытяжки асфальтобетона.

Таблица 6. Выживаемость тест-организма в водной вытяжке асфальтобетона

Показатель	Номер опыта	Концентрация водной вытяжки в пробе, % (разбавление)				
		100	10 (10)	1 (100)	0,1 (1000)	0,01 (10000)
Количество выживших циериодафний (из 10 особей)	1	5	8	9	9	9
	2	5	7	9	10	9
	3	6	7	9	9	10
Среднее значение выживаемости		5,3	7,3	9	9,6	9,6

Пробитное значение 5,0 (гибель 50%) соответствует $LgC = 1,95$;
 $C = 89,1\%$ - концентрация, вызывающая 50% гибель тест-организмов.
 $LKP_{50} = 1,12$.

Пробитное значение 3,72 соответствует $LgC = 0,3$.

$BKP_{10}=52,63 < 100$, в соответствии с [127] класс опасности материала

Таблица 7. Результаты определения острой токсичности водной вытяжки асфальтобетона

Концентрация водной вытяжки в пробе, %	Десятичный логарифм концентрации	Смертность цериодафний в опыте, % к контролю	Значение пробита для экспериментально установленной гибели цериодафний	Оценка качества водной среды	
				ЛКР ₅₀	БКР ₁₀
100	2	44	4,85	1,12	52,6
10	1	24	4,29		
1	0	6	3,45		
0,1	-1	-			
0,01	-2	-			

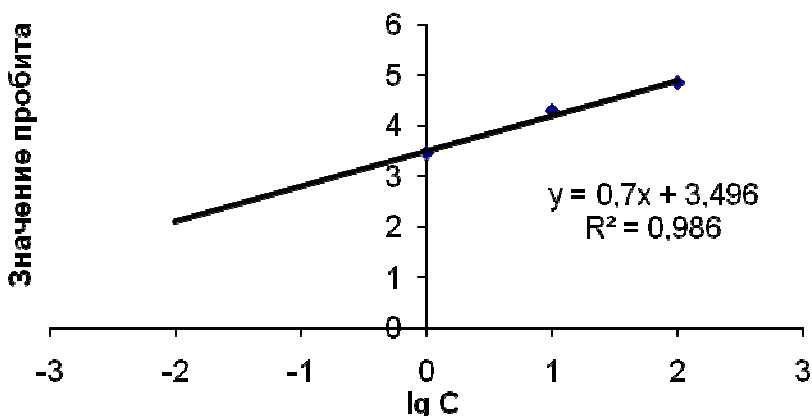


Рис. 2. Зависимость гибели дафний от концентрации водной вытяжки асфальтобетона

По результатам проведенной работы можно сделать вывод, что переработка тяжелых нефтесодержащих отходов в битумные пасты, с последующим получением асфальтобетонов позволила снизить класс опасности материалов со 2 (высокоопасные) до 4 (малоопасные) и уменьшить негативное воздействие на окружающую природную среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Технология переработки отходов: Монография / Э. М. Соколов, Ю. А. Москвичев, Е. А. Фролова, Н.С. Яманина, О.П. Филиппова, Н. И. Володин, В. М. Макаров. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2006. 387 с.
2. ФР.1.39.2007.03221. Методика определения токсичности воды и водных вытяжек из почв, осадков сточных вод, отходов по смертности и изменению плодovitости периодафний.
3. ФР.1.39.2007.03223. Методика определения токсичности вод, водных вытяжек из почв, осадков сточных вод и отходов по изменению уровня флуоресценции хлорофилла и численности клеток водорослей.
4. *Плохинский Н.А.* Математические методы в биологии. М.: МГУ, 1978.
5. МУ 1.1.037-95 Биогестирование продукции из полимерных и других материалов.
6. Приказ № 511 от 15.06.2001 г. "Об утверждении Критериев отнесения опасных отходов к классу опасности для окружающей природной среды".
7. *Позднышев Г.Н.* Стабилизация и разрушение нефтяных эмульсий. М.: Недра, 1982. 221 с.
8. ГОСТ 9128-97. Смеси асфальтобетонные дорожные, аэродромные и асфальтобетон.

УДК 628.4.045

В. М. Макаров, Н. Л. Маркелова, С. З. Калаева

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: makarovvm@ystu.ru

ОЧИСТКА ВОДНОГО СЛОЯ ПРУДОВ-НАКОПИТЕЛЕЙ КИСЛОГО ГУДРОНА

В статье рассмотрена проблема очистки водного слоя прудов-накопителей кислого гудрона. Предложены электрохимические методы очистки.

Ключевые слова: кислый гудрон, водный слой, ПАВ, электрохимические методы.

V. M. Makarov, N. L. Markelova, S. Z. Kalaeva

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: makarovvm@ystu.ru

CLEANING THE WATER LAYER STORAGE POND ACID TARS

The article considers the problem of cleaning the water layer of drives ponds acid sludge. Proposed electrochemical cleaning methods.

Keywords: acid sludge, the aqueous layer, surfactants, electrochemical methods.

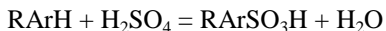
Ярославский нефтеперерабатывающий завод им. Д. И. Менделеева является типичным предприятием, ранее использующим серную кислоту для очистки смазочных масел, и владельцем прудов-накопителей кислого гудрона – отхода, применяемой подобной технологии. К сожалению, до настоящего времени не удалось до конца решить проблему их утилизации. Это связано, в частности, с тем, что за длительный период сбора данных отходов в открытых прудах-накопителях над слоем кислого гудрона находится слой кислой воды высотой до 3 метров.

Водный слой, загрязненный сульфокислотами, нефтепродуктами, не позволяет извлечь основное количество углеводорода, находящегося в нижнем слое. Откачать водный слой и сбросить его в водоем не представляется возможным в связи с высоким содержанием загрязняющих веществ, особенно поверхностно-активных веществ (ПАВ), содержание которых доходит до 6000 мг/дм³.

Анализ литературных данных [1-6] показывает, что очистка промышленных сточных вод с такой высокой концентрацией ПАВ весьма проблематична.

Для исследования процесса очистки пробы воды отбирались с различных глубин в различные периоды года и анализировались на содержание ПАВ, эфирозвлекаемых, фенола, сульфатов, хлоридов, аммония, железа, БПК, ХПК, взвешенных веществ, рН, кислотность, сухой остаток. Результаты анализов приведены в таблице 1.

Как видно состав водного слоя колеблется в зависимости, очевидно, от дождевых и снеговых осадков. Идентификация ПАВ показала, что основную их часть составляют анионоактивные, приблизительно 92%. Анионоактивные ПАВ образуются из смол в процессе обработки масел серной кислотой:



Образующиеся сульфокислоты дают истинные растворы в воде и относятся к классу водомаслорастворимых. При наличии в воде ионов металла сульфокислоты образуют растворимые в воде сульфонаты RSO_3Na и алкиларилсульфонаты $\text{R-Ar-SO}_3\text{Na}$ (нейтрализация масла после кислотной обработки проводилась натриевой щелочью). Небольшое количество ПАВ является неионогенными (~8%).

На лабораторной электролитической ванне объемом 300 мл опыты проводились в стационарном режиме с использованием электродов из нержавеющей стали, графита, платины, титана, располагаемые горизонтально (сетчатые) и вертикально (пластинчатые), и выпрямителя ВСА-5К.

Таблица 1 – Состав прудовой воды над слоем кислого гудрона

Даты отбора проб воды в 2015 г.	ПАВ аноиноактивные, мг/дм ³	ОП – 10, мг/дм ³	Эфирозвлекаемые, мг/дм ³	Нефтепродукты, мг/дм ³	Взвешенные, мг/дм ³	Солесодержание, мг/дм ³	Железо общее, мг/дм ³	Хлориды, мг/дм ³	Сульфаты, мг/дм ³	БПК ₅ , мгО ₂ /дм ³	ХПК, мгО ₂ /дм ³	Сухой остаток, мг/дм ³	рН
04.05	4600	26	800	920	70	4716	138	1400	444	400	5200	12730	3,8
12.05	3900	28	500	600	54	4520	131	1200	420	380	5050	10276	4,1
22.07	3800	24	480	450	44	4140	96	1050	390	380	4900	9800	4,6
15.08	3800	25	340	420	40	3800	94	1000	280	340	4500	9400	5,1
18.09	2900	22	320	380	35	3600	70	900	275	350	4500	9100	5,3
20.11	2800	32	144	320	36	2900	32	700	270	360	4350	9000	5,6
11.12	2600	22	160	330	32	2700	31	680	210	355	4260	8200	5,8

Для очистки воды от ПАВ, как одного из основных и трудноразалагаемых биохимическим способом загрязнений использовались различные электрохимические способы: электроокисление, электрокоагуляция и электрофлотация. Сущность электроокисления заключается в окислении ПАВ на нерастворимом аноде до биологически разлагаемых веществ.

Изучалась зависимость эффективности очистки от плотности тока (%), времени электролиза, рН исходной воды по формуле

$$\Xi = \frac{C_{и} - C_{т}}{C_{и}} \cdot 100,$$

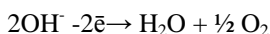
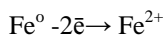
где $C_{и}$ – исходная концентрация ПАВ, мг/дм³; $C_{т}$ – концентрация ПАВ в отобранной пробе через время Т.

С увеличением плотности тока при использовании любых электродов эффективность очистки пропорциональна возрастает до величины 2 А/дм², после чего увеличение Ξ весьма незначительна. При исходной концентрации ПАВ 2600 мг/дм³ эффективность составляет всего 20%. При разбавлении воды до концентрации ПАВ 500 мг/дм³ при применении графитовых анодов и стальных катодов эффективность возрастает до 80% за время электролиза 30 минут. Плотность тока 2 А/дм² и расходе электроэнергии 8 кВт·ч/м³. При этом величина рН увеличивалась от исходной на 20%.

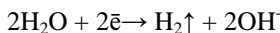
В дальнейшем исходная концентрация ПАВ в очищаемой воде составляла 500 мг/дм³.

Сущность электрокоагуляционного способа заключается в образовании гидроксида металла при растворении металлических электродов под действием электрического тока. Растворяют, как правило, стальные или алюминиевые электроды. Гидроксиды железа и алюминия являются хорошими сорбентами для различных загрязняющих компонентов, находящихся в сточных водах. Процесс очистки в электрокоагуляторе сопровождается явлениями электрофореза, электрофлотации, поэтому эффективность его много выше, чем коагуляция химическими реагентами. На электродах протекают следующие реакции:

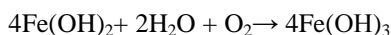
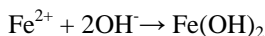
На аноде:



На катоде:



Образование гидроксидов:



Поверхностно-активные вещества (ПАВ) сорбируются гидроксидами железа, флоатируются на поверхности пузырьками водорода, а также частично осаждаются вместе с гидроксидами на дно аппарата.

Исследования проводили в электролизной ячейке объемом 300 мл. Электроды из стали (Ст 3) или алюминия размером 48x43 мм располагались вертикально на расстоянии 10 мм. Исследовалась зависимость эффективности очистки от плотности тока, времени электрообработки, рН исходной воды.

С увеличением плотности тока больше 1 А/дм² расход энергии резко возрастает, и за 15 мин обработки воды превышает 20 кВт·час/м³. Эффективность очистки также возрастает, но не превышает 30%.

Расход электроэнергии (кВт·ч/м³) был определен по формуле

$$W = \frac{J \cdot U \cdot t}{V},$$

где W – удельные энергозатраты; J – рабочий ток, А; U – напряжение на электродах, В; t – время обработки воды, ч; V – объем очищенной воды, м³.

Для регулирования величины рН в исходную воду добавлялся едкий натр, и проводилась очистка. При оптимальном значении рН = 5,5 исход-

ной воды, плотности тока 1 А/дм^2 и времени процесса 15 минут лучшая степень очистки 72% достигается на стальных электродах. При этом на алюминиевых электродах эффективность составляет 52%.

Расход металла в граммах на 1 м^3 очищаемой воды определялся по формуле

$$m_{Me} = \frac{K_э \cdot I \cdot t}{V \cdot \beta},$$

где $K_э$ – электрохимический эквивалент металла, $K_э$ для Fe = $0,2893 \cdot 10^{-3} \text{ г/А}\cdot\text{с}$; $K_э$ для Al = $0,09305 \cdot 10^{-3} \text{ г/А}\cdot\text{с}$; I – сила тока, А; t – время проведения процесса, с; V – объем ячейки, $\text{м}^3 = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$; β – выход металла по току, равный 0,8.

При использовании при электрокоагуляции железных электродов расход металла на 1 м^3 составил $m_{Fe} = 1084 \text{ г/м}^3$, алюминиевых – $m_{Al} = 348 \text{ г/м}^3$.

Таким образом, при эффективности очистки 72% от первоначальной концентрации ПАВ 500 мг/дм^3 остаточная концентрация будет равна при двухстадийной очистке $32,8 \text{ мг/дм}^3$. Предельно-допустимые концентрации ПАВ, поступающих на биологические очистные сооружения, составляют 100 мг/дм^3 при сбрасывании осадка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Промышленная экология: Учебное пособие / под ред. В.В. Денисова. М.: ИКЦ «МарТ», 2007. 720 с.
2. Карминский В.Д. Экологические проблемы и энергосбережение: Учебное пособие для вузов / В.Д. Карминский, В.И. Колесников, Ю.А. Жданов, В.М. Гарин. М.: Маршрут, 2004. 592 с.
3. Химия окружающей среды: пер. с англ. / под ред. А.П. Цыганкова. М.: Химия, 1982. 672 с.
4. Волков В.А. Теоретические основы охраны окружающей среды: Учебное пособие. СПб: Изд-во «Лань», 2015. 256 с.
5. Кривошеин Д.А. Основы экологической безопасности производств: Учебное пособие / Д.А. Кривошеин, В.П. Дмитриенко, Н.В. Федотова. С.Пб: Изд-во «Лань», 2015. 336 с.
6. Ветошкин А.Г. Инженерная защита водной среды: Учебное пособие. СПб: Изд-во «Лань», 2014. 416 с.

УДК 637.12.004.12

Н. С. Соколова, А. С. Ермишин*

Ярославская государственная сельскохозяйственная академия
Россия, г. Ярославль, *e-mail: natalie_55_94@bk.ru*,
*Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: ermishinas@ystu.ru*

КАЧЕСТВО МОЛОКА-СЫРЬЯ ОТ РАЗНЫХ ПОСТАВЩИКОВ ПРИ ВЕТЕРИНАРНО- САНИТАРНОМ КОНТРОЛЕ НА ПРЕДПРИЯТИИ

Приведены результаты научного анализа производственного ветеринарно-санитарного контроля качества сырого молока, доставляемого от разных поставщиков на ООО «Мантуровский сыродельный комбинат».

Ключевые слова: сырое молоко коровье, физико-химические показатели, бактериологические показатели, безопасность продукции.

N. S. Sokolova, A. S. Ermishin*

*Yaroslavl State Agricultural Academy
Russia, Yaroslavl, e-mail: natalie_55_94@bk.ru,
*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru*

THE QUALITY OF MILK-RAW MATERIALS FROM DIFFERENT SUPPLIERS WITH THE VETERINARY AND SANITARY CONTROL OF THE ENTERPRISE

The results of the scientific analysis of veterinary and sanitary control of raw milk delivered from different suppliers at the enterprise «Manturovskiy syrodelnnyy kombinat» are presented in the article.

Keywords: raw cow milk, physico-chemical parameters, bacteriological parameters, product safety.

Молоко и продукты его переработки – одни из самых востребованных и любимых продуктов населения. Поэтому не вызывает никакого сомнения важность соблюдения требований безопасности и качества к сырому коровьему молоку, получаемому от сельскохозяйственных производителей и доставляемому на молокоперерабатывающие комбинаты. Проведение научного анализа результатов производственного ветеринарно-

санитарного контроля молока-сырья представляет научную новизну и практическую значимость данной работы для перерабатывающей отрасли.

ООО «Мантуровский сыродельный комбинат» – небольшое молокоперерабатывающее предприятие, на котором необходимо внедрять систему управления качеством и безопасностью пищевых продуктов на основе принципов ХАССП (от англ. Hazard Analysis and Critical Control Points (НАССР) – анализ рисков и критические контрольные точки), так как это является обязательным условием для всех предприятий пищевой промышленности на территории Таможенного союза. Однако, не имея комплексного научного анализа производственных данных по сырью, поставляемому на комбинат, это невозможно сделать.

На предприятие ООО «Мантуровский сыродельный комбинат» молоко поставляется из нескольких сельскохозяйственных предприятий. Мы выбрали случайным образом для большей информативности четыре хозяйства (под условными номерами 1, 2, 3 и 4), представляющих разные районы Костромской области.

Установлено, что большее количество сырого молока в среднем в год поставляло хозяйство № 2 (Макарьевский район) – 8026 кг, что на 632 кг больше, чем от хозяйства № 1 (Мантуровский район), на 5364 кг больше, чем от хозяйства № 3 (Кологривский район) и на 2997 кг больше, чем от хозяйства № 4 (Шарьинский район).

В летний и зимний периоды молоко-сырьё от всех хозяйств по органолептическим показателям не имело отличий между разными поставщиками. В осенний период сырое молоко от хозяйства № 3 светло-кремового цвета; молоко-сырьё от хозяйства № 4 имело специфический, слегка сладковатый вкус. В весенний период сырое молоко от хозяйства № 4 отличалось светло-кремовым цветом и имело специфический, слегка сладковатый вкус. В общей сложности молоко-сырьё, полученное от четырех хозяйств, по органолептическим показателям соответствует ГОСТ Р 52054-2003 [1].

Результаты физико-химических и микробиологических исследований по периодам года приведены в табл. 1–4.

Самый высокий показатель массовой доли жира (МДЖ) имело молоко-сырьё от хозяйства № 1 (4,00 %). Содержание жира в молоко-сырьё изменялось за исследуемый период от 3,63 – 4,00 %.

Самый высокий показатель массовой доли белка (МДБ) имело сырое молоко также от хозяйства № 1 (3,15 %). Содержание белка в молоко-сырьё варьировало за исследуемый период от 2,92 – 3,15 %.

По содержанию сухого вещества в сыром молоке, принятого из разных хозяйств, наиболее высокий показатель был у молока-сырья из хозяйства № 1 (12,81 %).

Таблица 1. Результаты физико-химических и микробиологических показателей молока-сырья в летний период

Показатели	Хозяйство № 1 Мантуровский район		Хозяйство № 2 Макарьевский район		Хозяйство № 3 Кологривский район		Хозяйство № 4 Шарьинский район	
	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %
Количество молока, кг	2068,3±101,1	5,45	2071,7±65,6	3,43	685,0±86,7	13,47	1060,0±40,0	4,29
Кислотность, °Т	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14
Плотность, г/см ³	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15
Группа чистоты	1	×	1	×	1	×	1	×
МДЖ, %	4,00±0,01	0,08	3,86±0,04	1,30	3,76±0,04	1,33	3,63±0,04	0,23
МДБ, %	3,15±0,01	0,32	2,99±0,01	0,33	2,93±0,01	0,34	3,04±0,04	0,09
Сухое вещество, %	12,81±0,01	0,02	12,77±0,01	0,33	12,75±0,01	0,31	12,73±0,01	0,001
СОМО, %	8,81±0,01	0,20	8,91±0,03	1,23	8,99±0,03	0,41	9,09±0,03	0,004
Бактериальная обсеменённость, класс	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×
Температура, °С	8,0±0,01	0,15	8,0±0,01	0,15	7,6±0,40	18,82	8,0±0,01	0,15
Соматические клетки, тыс./см ³	398,42±28,38	7,87	338,45±64,81	20,54	421,80±87,84	0,22	299,16±20,82	7,41
Сорт	1	×	1	×	1	×	1	×

Таблица 2. Результаты физико-химических и микробиологических показателей молока-сырья в осенний период

Показатели	Хозяйство № 1 Мантуровский район		Хозяйство № 2 Макарьевский район		Хозяйство № 3 Кологривский район		Хозяйство № 4 Шарьинский район	
	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %
Количество молока, кг	1895,0±176,7	9,77	2016,7±215,6	11,43	526,7±42,2	8,82	1260,0±80,0	6,74
Кислотность, °Т	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14
Плотность, г/см ³	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15
Группа чистоты	1	×	1	×	1	×	1	×
МДЖ, %	3,93±0,04	1,27	3,80±0,06	0,21	3,80±0,01	0,05	3,60±0,06	0,22
МДБ, %	3,14±0,01	0,32	2,98±0,02	0,67	2,92±0,01	0,34	3,05±0,04	1,38
Сухое вещество, %	12,79±0,01	0,07	12,76±0,01	0,16	12,76±0,01	0,10	12,73±0,01	0,16
СОМО, %	8,85±0,03	0,45	8,96±0,05	0,78	8,96±0,01	0,02	9,13±0,05	0,77
Бактериальная обсеменённость, класс	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×
Температура, °С	7,6±0,40	18,82	7,6±0,40	18,82	7,6±0,40	18,82	8,0±0,01	0,23
Соматические клетки, тыс./см ³	389,76±24,08	6,92	339,02±63,25	20,01	414,98±92,79	24,04	279,71±32,36	12,45
Сорт	1	×	1	×	1	×	1	×

Содержание сухого обезжиренного молочного остатка (СОМО) было выше в молоке-сырьё от двух хозяйств: № 3 Кологривского и № 4 Шарьинского районов. Содержание СОМО варьировало 8,81 – 9,12 %, что свидетельствует о натуральности молока-сырья.

Содержание соматических клеток в молоке от всех поставщиков находилось в пределах 275,67 – 421,80 тыс./см³, что отвечает требованиям ГОСТ 23453-2014 [2], а это значит, что маститное коровье молоко не попадает в переработку и, тем самым, не снижает качество производимой из него продукции.

Кислотность (18 °Т), плотность (1,028 г/см³), группа чистоты (I), бактериологическая обсемененность (менее 500 тыс.) молока-сырья находится в пределах нормы у всех хозяйств-поставщиков.

Таблица 3. Результаты физико-химических и микробиологических показателей молока-сырья в зимний период

Показатели	Хозяйство № 1 Мантуровский район		Хозяйство № 2 Макарьевский район		Хозяйство № 3 Кологривский район		Хозяйство № 4 Шарьинский район	
	M±m	Cv, %	M±m	Cv, %	M±m	Cv, %	M±m	Cv, %
Количество молока, кг	1711,7±58,9	4,17	1701,7±257,8	16,52	468,3±98,9	22,61	1228,3±134,4	12,70
Кислотность, °Т	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14	18,0±0,01	0,14
Плотность, г/см ³	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15	1,028±0,01	0,15
Группа чистоты	I	×	I	×	I	×	I	×
МДЖ, %	3,90±0,01	0,08	3,76±0,04	1,33	3,80±0,06	0,21	3,76±0,11	6,91
МДБ, %	3,09±0,05	1,62	3,07±0,12	4,04	2,99±0,02	1,00	2,94±0,004	0,17
Сухое вещество, %	12,78±0,01	0,02	12,76±0,01	0,07	12,76±0,01	0,16	12,76±0,02	0,16
СОМО, %	8,88±0,01	0,02	8,99±0,03	0,44	8,96±0,05	0,78	8,99±0,08	1,11
Бактериальная обсемененность, класс	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×
Температура, °С	7,3±0,40	19,18	7,3±0,40	19,18	7,6±0,40	18,82	7,6±0,40	18,82
Соматические клетки, тыс./см ³	389,04±28,54	7,78	323,18±72,96	23,96	404,34±79,56	21,49	275,67±29,85	11,83
Сорт	I	×	I	-	I	×	I	×

Сравнивая результаты физико-химических исследований в летний, зимний и переходные периоды, видим, что наибольшее содержание жира в молоке наблюдалось зимой и в осенний переходный период, что обусловлено кормлением животных, главным образом, составом рационов (давали больше грубых кормов, в т. ч. сена). Биологически закономерно повышение МДЖ в молоке за счёт скармливания жвачным животным грубых, высоко структурных кормов. Микробы, обитающие в пищеварительном тракте крупного рогатого скота, разлагают клетчатку и сахара до уксусной,

пропионовой, масляной и молочной кислот (так называемых летучих жирных кислот), которые используются животными в качестве энергетического материала и преимущественно на синтез жиров и углеводов. Эти вещества всасываются в кровь из желудочно-кишечного тракта, а затем, не изменяясь (за исключением углеводов), из крови переходят в молоко.

Таблица 4. Результаты физико-химических и микробиологических показателей молока-сырья в весенний период

Показатели	Хозяйство № 1 Мантуровский район		Хозяйство № 2 Макарьевский район		Хозяйство № 3 Кологривский район		Хозяйство № 4 Шарьинский район	
	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %	M±m	C _v , %
Количество молока, кг	1720,0±106,7	7,17	2238,3±55,6	2,73	983,7±79,1	9,75	1481,7±104,4	8,10
Кислотность, °Т	18,0±0,01	0,15	18,0±0,01	0,16	18,0±0,02	0,16	18,0±0,01	0,16
Плотность, г/см ³	1,028±0,01	0,14	1,028±0,01	0,14	1,028±0,01	0,14	1,028±0,02	0,14
Группа чистоты	1	×	1	×	1	×	1	×
МДЖ, %	3,93±0,04	1,27	3,76±0,04	1,33	3,60±0,01	0,36	3,83±0,04	1,30
МДБ, %	3,14±0,01	3,18	2,98±0,02	1,01	2,93±0,01	0,34	3,05±0,04	1,31
Сухое вещество, %	12,78±0,01	0,16	12,75±0,01	0,09	12,72±0,01	0,32	12,76±0,01	0,31
СОМО, %	8,85±0,03	0,34	8,99±0,04	0,44	9,12±0,01	0,20	8,96±0,01	0,20
Бактериальная обсеменённость, класс	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×	Менее 500 тыс. (I класс)	×
Температура, °С	7,6±0,40	18,82	7,6±0,40	18,82	7,6±0,40	18,82	8,0±0,01	0,23
Соматические клетки, тыс./см ³	392,45±22,89	6,36	341,65±64,25	19,97	420,71±89,65	22,79	288,28±31,05	11,72
Сорт	1	×	1	×	1	×	1	×

Вариабельность всех показателей на протяжении всего изучаемого периода, не зависимо от сезона года, оставалась в пределах статистической нормы, не превышая 24 %. Самые высокие значения коэффициента изменчивости наблюдались закономерно по таким показателям, как количество молока (C_v = 2,73–22,61 %), доставляемого на предприятие, температура доставляемого молока-сырья (C_v = 0,15–19,18 %) и содержание соматических клеток (C_v = 0,22–24,04 %).

По результатам анализа физико-химических и микробиологических исследований молока-сырья является качественным и соответствует требованиям безопасности, предъявляемым к пищевой продукции Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности молока и молочной продукции» ТР ТС 033/2013 [3] и Едиными санитарно-эпидемиологическими и гигиеническими требованиями к товарам, подлежащим санитарно-эпидемиологическому надзору (контролю) [4].

В результате проведённых исследований, предлагаем ООО «Мантуровский сыродельный комбинат» закупать молоко-сырьё от трёх из представленных в работе хозяйств-поставщиков: № 1 Мантуровского района, № 2 Макарьевского района и № 4 Шарьинского района, так как у них выявлены самые лучшие качественные показатели сырья, особенно по содержанию жира и белка, что, в свою очередь, выгодно для производства молочной продукции – сыра, масла, творога и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 52054-2003. Молоко натуральное коровье-сырьё. Технические условия. Введ. 2004 – 01 – 01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
2. ГОСТ 23453-2014. Молоко сырое. Методы определения соматических клеток. Введ. 2016 – 01 – 01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
3. Технический регламент Таможенного союза «О безопасности молока и молочной продукции» (ТР ТС 033/2013) [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.gost.ru. Дата обращения: 01.02.2016 г.
4. Единые санитарно-эпидемиологические и гигиенические требования к продукции (товарам), подлежащей санитарно-эпидемиологическому надзору (контролю) (с изменениями на 10 ноября 2015 года). Утв. 2010 – 05 – 28. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.

УДК 637.4.004.12

Т. С. Ступина, А.С. Ермишин*

Ивановская государственная сельскохозяйственная академия
им. Д.К. Беляева

Россия, г. Иваново, *e-mail: ta-stup@mail.ru*,

*Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: ermishinas@ystu.ru*

КАЧЕСТВО И БЕЗОПАСНОСТЬ ПИЩЕВЫХ ЯИЦ В ООО «СЕВЕР»

Рассматриваются результаты глубокого научного анализа показателей качества и безопасности пищевых куриных яиц на птицефабрике «Север».

Ключевые слова: брак, корреляционный анализ, дисперсионный анализ, показатели качества и безопасности продукции, пищевые яйца.

T. S. Stupina, A. S. Ermishin*

Ivanovo State Agricultural Academy named after D.K. Belyaev

Russia, Ivanovo, e-mail: ta-stup@mail.ru,

**Yaroslavl State Technical University*

Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

THE QUALITY AND SAFETY OF FOOD EGGS IN THE ENTERPRISE «SEVER»

The results of a deep scientific indicators analysis of quality and food safety of eggs at poultry factory «Sever» are discussed.

Keywords: *vices of eggs, correlation analysis, analysis of variance, quality indicators and security products, food eggs.*

Птицеводство в Ярославской области является одной из наиболее перспективных отраслей животноводства, которая активно развивается в условиях рыночной экономики и обеспечивает население ценными продуктами питания. В современных условиях птицепромышленности остро стоит проблема качества и безопасности птицепродуктов. Наши исследования направлены на то, чтобы не допустить и исключить из реализации недоброкачественную и опасную в ветеринарно-санитарном отношении продукцию, предупредить возможные социальные последствия от реализации продукции, не отвечающей требованиям Технического Регламента Таможенного Союза 021/2011 «О безопасности пищевой продукции» [1].

Научная новизна работы состоит в том, что впервые применён комплекс методов биометрической обработки количественных показателей результатов ветеринарно-санитарной экспертизы пищевых яиц, включающий статистический анализ варьирующих величин, корреляционный и однофакторный дисперсионный анализ с оценкой достоверности эмпирических показателей по трём уровням вероятности.

Практическая значимость работы в том, что разработаны практические предложения по оптимизации технологического и санитарно-гигиенического режима сбора пищевых яиц и устранению или минимизации опасных рисков на ООО «Север» Ярославской области.

Исследования проводились по заявке предприятия ООО «Север».

Был проведён контроль качества сортировки яйца на птицефабрике «Север». Выявлено 2,8 % брака от партии яиц в количестве 2740 штук.

Результаты контроля по диетическому яйцу представлены на рис. 1.

Отборное яйцо бракованных единиц продукции не имело. Наиболее чаще встречающиеся причины брака яиц – грязь и присохший помёт на скорлупе – свидетельствуют о недостаточной санитарной обработке на птицефабрике.

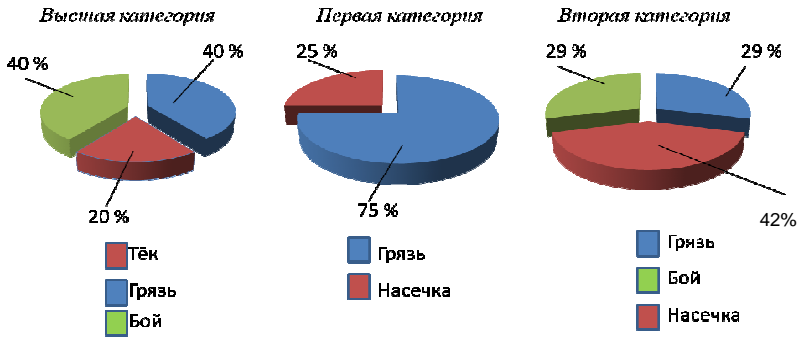


Рис. 1. Диаграммы распределения брака диетических яиц в разрезе категорий по видам

Результаты контроля по столовому яйцу представлены на рис. 2.

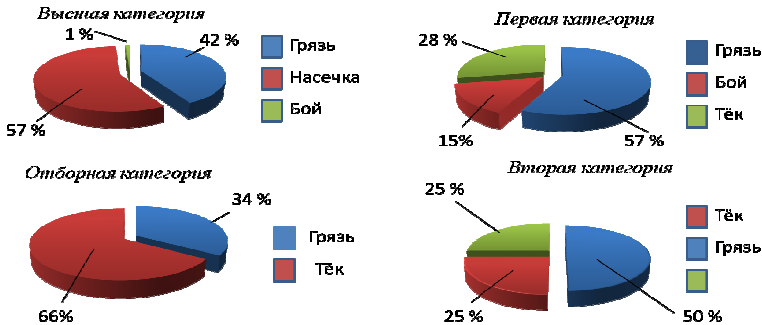


Рис. 2. Диаграммы распределения брака столовых яиц в разрезе категорий по видам

Отбракованное яйцо было направлено на предприятие пищевой промышленности по производству хлебобулочных изделий на переработку.

Определение массы яиц позволяет присвоить яйцу категорию. Яйца в зависимости от массы подразделяют на пять категорий: высшая (В), отборная (О), первая (1), вторая (2) и третья (3). Яйца третьей категории на птицефабрике ООО «Север» не встречались.

В табл. 1 представлены результаты по определению массы яйца. Полученные нами результаты свидетельствуют о том, что исследуемые образцы яиц соответствовали категориям, к которым были отнесены при их сортировке на птицефабрике по массе.

Таблица 1. Результаты определения массы яиц по ГОСТ 31654-2012 [2] в ООО «Север» ($M \pm m$)

Показатели	Значение показателей при измерениях для яиц по категориям				Значения показателей по нормативной документации для яиц по категориям			
	В	О	1	2	В	О	1	2
<i>Диетические яйца</i>								
1. Масса 1 яйца, г	77,9±0,25	69,1±0,21	59,9±0,26	50,3±0,31	От 75 и выше	От 65 до 74,9	От 55 до 64,9	От 45 до 54,9
2. Масса 10 яиц, г	792,9±2,63	709,5±2,15	619,3±2,32	511,9±3,09	От 750 и выше	От 650 до 749,9	От 550 до 649,9	От 450 до 549,9
<i>Столовые яйца</i>								
1. Масса 1 яйца, г	78,5±0,27	69,0±0,26	58,5±0,24	47,5±0,34	От 75 и выше	От 65 до 74,9	От 55 до 64,9	От 45 до 54,9
2. Масса 10 яиц, г	794,7±2,75	699,7±2,45	592,7±2,52	489,7±3,21	От 750 и выше	От 650 до 749,9	От 550 до 649,9	От 450 до 549,9

Органолептическая оценка качества пищевых яиц служит товарной характеристикой продукта. Из органолептических показателей мы определяли состояние воздушной камеры и её высоту, состояние и положение желтка, прочность и цвет белка. Результаты исследования органолептических показателей представлены в табл. 2.

По состоянию и положению желтка при овоскопировании все образцы пищевых яиц и диетические и столовые соответствовали нормативной документации. Воздушная камера яиц была неподвижна. Её высота составила у всех образцов столовых яиц около 3 мм (от 2,9 до 3,0 мм), диетических яиц – около 2 мм (от 1,9 до 2,1 мм). При визуальном осмотре белок исследуемых столовых и диетических яиц был плотным, прозрачным и светлым.

Бактериологическое исследование относится к одному из наиболее строго регламентированных методов контроля качества и безопасности продовольствия. Мы исследовали образцы пищевых яиц по следующим показателям: бактерии группы кишечной палочки (БГКП), количество мезофильных аэробных и факультативно анаэробных микроорганизмов (КМАФАнМ), патогенные микроорганизмы, в т.ч. сальмонеллы. Результаты бактериологического исследования яиц представлены в табл. 3.

При бактериальном исследовании по количеству мезофильных аэробных и факультативно анаэробных микроорганизмов (КМАФАнМ), исследуемые образцы яиц удовлетворяли требованиям нормативной документации. В среднем, у столовых яиц число их в пределах от 10 до

38 КОЕ/см³ при максимально допустимом значении 5 тыс. КОЕ/см³; у диетических яиц – от 9 до 40 при максимально допустимом значении 100 КОЕ/см³. Условно-патогенных колиформных микроорганизмов, таких как бактерии группы кишечной палочки (*Escherichia coli*, *Enterococcus*, *Proteus* и др.), а также патогенных микробов, в том числе сальмонелл- *S. Enteridis*, *S. Infantis* *S. Heidelberg*) в образцах столовых и диетических яиц выявлено не было.

Таблица 2. Результаты органолептической оценки пищевых яиц в ООО «Север» (M±m)

Показатели	Значение показателей при измерениях для яиц по категориям				Значения показателей по нормативной документации для яиц по категориям				Нормативная документация на методы испытаний	
	В (n=45)	О (n=45)	1 (n=45)	2 (n=45)	В	О	1	2		
<i>Диетические яйца (n=180)</i>										
1. Состояние воздушной камеры и её высота (мм)	Неподвижная; высота:				Неподвижная или допускается некоторая подвижность; высота – не более 4 мм				ГОСТ 31654-2012	
	2,1±0,17	2,3±0,17	2,0±0,16	1,9±0,16						
2. Состояние и положение желтка	Прочный, едва видимый, контуры не видны, занимает центральное положение и не перемещается				Прочный, едва видимый, но контуры видны, занимает центральное положение и не перемещается					
3. Прочность и цвет белка	Плотный, светлый, прозрачный				Плотный, светлый, прозрачный					
<i>Столовые яйца (n=180)</i>										
1. Состояние воздушной камеры и её высота (мм)	Неподвижная; высота:				Неподвижная или допускается некоторая подвижность; высота – не более 7 мм					ГОСТ 31654-2012
	2,8±0,16	3,0±0,16	3,0±0,17	2,9±0,16						
2. Состояние и положение желтка	Прочный, мало заметный, неподвижный, без отклонения от центрального положения				Прочный, мало заметный, может слегка перемещаться, допускается небольшое отклонение от центрального положения					
3. Прочность и цвет белка	Плотный, светлый, прозрачный				Плотный, светлый, прозрачный					

Таблица 3. Результаты бактериологического исследования пищевых яиц в ООО «Север» ($M \pm m$)

Показатели	Значение показателей при измерениях для яиц по категориям				Значения показателей по нормативной документации для яиц по категориям				Нормативная документация на методы испытаний
	В (n=22)	О (n=22)	1 (n=23)	2 (n=23)	В	О	1	2	
<i>Диетические яйца (n=90)</i>									
1. БГКП (колиформы)	Не обнаружены в 0,1 см ³				Не допускаются в 0,1 см ³				ГОСТ 31747-2012 [3]
2. КМАФАнМ, КОЕ/см ³	9,4±2,33	16,0±2,07	22,0±1,98	40,4±2,13	Не более 100				ГОСТ 10444.15-94 [4]
3. Патогенные микроорганизмы, в т.ч. сальмонеллы	Не обнаружены в 5×25 см ³				Не допускаются в 5×25 см ³				ГОСТ 31747-2012
<i>Столовые яйца (n=90)</i>									
1. БГКП (колиформы)	Не обнаружены в 0,01 см ³				Не допускаются в 0,01 см ³				ГОСТ 31747-2012
2. КМАФАнМ, КОЕ/см ³	10,2±2,15	15,0±1,95	10,5±2,04	37,8±2,22	Не более 100				ГОСТ 10444.15-94
3. Патогенные микроорганизмы, в т.ч. сальмонеллы	Не обнаружены в 5×25 см ³				Не допускаются в 5×25 см ³				ГОСТ 31747-2012

Нами была проведено сравнение полученных данных по показателю общей бактериальной обсемененности пищевых яиц в разрезе категорий. Результаты сравнения представлены в табл. 4.

При сравнении категорий яиц по показателю КМАФАнМ наибольшая разность наблюдалась среди диетических яиц – у второй и высшей категорий и составила 31. Разность высоко достоверна (при $P \geq 0,999$); наименьшая разность оказалась при сравнении второй и первой категории – 0,06. Разность статистически недостоверна. Среди столовых яиц наибольшая разность получилась у категорий второй и высшей и составила 27,6. Разность высоко достоверна (при $P \geq 0,999$); наименьшая разность получилась среди категорий первой и высшей. Эта разность статистически недостоверна.

Также при сравнении полученных данных по КМАФАнМ между аналогичными категориями диетических и столовых пищевых яиц получили следующее: у столового яйца высшей категории показатель общей

бактериальной обсемененности выше на 0,8 КОЕ/см³ по сравнению с диетическим яйцом высшей категории. Разница достоверна при первом пороге (при $P \geq 0,95$). Между отборной категорией разница столовых и диетических яиц составила в 1 КОЕ/см³. Разница достоверна при $P \geq 0,95$. По первой категории разность получилась равной 11,5 КОЕ/см³. Разница достоверна при $P \geq 0,999$. По второй категории разница равна 2,6 КОЕ/см³. Разница оказалась достоверна при $P \geq 0,95$.

Таблица 4. Сравнительная характеристика полученных данных по КМАФАнМ диетических и столовых пищевых яиц в разрезе категорий

Сравниваемые категории яиц	$d \pm m_d$
Диетические яйца	
1. Высшая – отборная	6,6±0,26*
2. Высшая – первая	12,6±0,35***
3. Высшая – вторая	31±0,20***
4. Отборная – первая	6±0,09*
5. Отборная – вторая	24,4±0,06***
6. Первая – вторая	0,06±0,15
Столовые яйца	
1. Высшая – отборная	4,8±0,20*
2. Высшая – первая	0,3±0,11
3. Высшая – вторая	27,6±0,07***
4. Отборная – первая	4,5±0,10
5. Отборная – вторая	22,8±0,27***
6. Первая – вторая	27,3±0,18***

Примечание: * разность достоверная при $P \geq 0,95$;
*** разность достоверная при $P \geq 0,999$.

Проблема наличия антибиотиков в продуктах питания существует, и она очень серьезная. Согласно действующему законодательству РФ в пищевых продуктах антибиотиков не должно быть.

Поскольку остаточные количества антибиотиков способствуют появлению у населения устойчивых к антибиотикам штаммов микроорганизмов и развитию аллергических реакций у человека, то мы провели исследование на наличие антибиотиков в пищевых яйцах ООО «Север».

В результате в исследуемых образцах пищевых яиц антибиотиков, а именно антибиотиков тетрациклиновой группы, бацитрацина и левомицетина обнаружено не было.

Химико-токсикологическое исследование пищевых яиц способно распознать наличие следов токсичных элементов, хлорорганических пестицидов. Существует более 50 элементов, которые могут быть отнесены к

тяжёлым металлам, 17 из них считаются очень токсичными, но довольно широко распространёнными. Токсичная концентрация зависит от вида металла, его биологической роли и вида организма, который подвергается его воздействию.

Основные пути попадания тяжелых металлов в пищевые продукты:

- 1) техногенное загрязнение воздуха, почвы и воды;
- 2) применение лечебных препаратов, содержащих мышьяк;
- 3) скармливание кормов, обработанных ртутными и другими пестицидами.

Результаты по определению указанных выше элементов в пищевом яйце представлены в табл. 5.

Таблица 5. Результаты химико-токсикологического исследования пищевых яиц в ООО «Север»

Показатели	Значение показателей при измерениях для яиц по категориям				Значения показателей по нормативной документации для яиц по категориям				Нормативная документация на методы испытаний
	В (n=22)	О (n=22)	1 (n=23)	2 (n=23)	В	О	1	2	
<i>Диетические яйца (n=90)</i>									
1. Токсичные элементы, мг/кг:	Менее:				Не более:				ГОСТ 30178-96 [5] ГОСТ Р 51766-2001 [6] ГОСТ 30178-96 ГОСТ 26927-86 [7]
- свинец	0,02				0,3				
-мышьяк	0,001				0,1				
-кадмий	0,005				0,01				
-ртуть	0,0002				0,02				
2. Хлорорганические пестициды, мг/кг:	Менее 0,04				Не более 0,1				Методы определения микроколичеств пестицидов под ред. М.А. Клисенко, Т. 1, 2. М: Колос, 1992 [8, 9]
– гексахлоргексан (α, β, γ-изомеры) – ДДТ и его метаболиты	Менее 0,04				Не более 0,1				
<i>Столловые яйца (n=90)</i>									
1. Токсичные элементы, мг/кг:	Менее:				Не более:				ГОСТ 30178-96 ГОСТ Р 51766-2001 ГОСТ 30178-96 ГОСТ 26927-86
- свинец	0,02				0,3				
-мышьяк	0,001				0,1				
-кадмий	0,005				0,01				
-ртуть	0,0002				0,02				
2. Хлорорганические пестициды, мг/кг:	Менее 0,04				Не более 0,1				Методы определения микроколичеств пестицидов под ред. М.А. Клисенко, Т. 1, 2. М: Колос, 1992.
– гексахлоргексан (α, β, γ-изомеры) – ДДТ и его метаболиты	Менее 0,04				Не более 0,1				

В ходе химико-токсикологического анализа в пищевой продукции были обнаружены лишь следы мышьяка и тяжёлых металлов, таких как ртуть, кадмий, свинец, а также хлорорганических соединений – в количествах, значительно меньших, чем предел чувствительности метода их обнаружения – менее 0,04 мг/кг, что находится в пределах допустимого уровня по их содержанию.

В настоящее время с развитием генной инженерии всё большее распространение приобретает генно-модифицированная продукция, в частности трансгенная соя. Большая часть выращиваемой в мире трансгенной сои идёт на корм скоту и птице. Проблема безопасности трансгенной сои является частью обширной дискуссии о безопасности генно-инженерных организмов в целом. В России производство такой продукции запрещено. Поэтому все продукты проверяются на наличие рекомбинантной (т.е. генно-модифицированной) ДНК.

Результаты нашего исследования по обнаружению рекомбинантной ДНК в пищевых яйцах ООО «Север».

В результате во всех исследуемых образцах диетических и столовых яиц рекомбинантной ДНК обнаружено не было.

На основании полученных результатов органолептической оценки и бактериологического исследования пищевых яиц нами был проведен корреляционный анализ между высотой воздушной камеры яйца и показателя общей бактериальной обсемененности. Результаты нашей работы по корреляционному анализу представлены в таблице 6.

Таблица 6. Корреляции между высотой воздушной камеры и КМАФАнМ разных категорий пищевых яиц

Категории пищевых яиц	$r \pm m_r$
<i>Диетические яйца</i>	
1. Высшая категория	+0,21±0,20*
2. Отборная категория	+0,16±0,21
3. Первая категория	+0,09±0,21
4. Вторая категория	+0,02±0,19
<i>Столовые яйца</i>	
1. Высшая категория	+0,29±0,20*
2. Отборная категория	+0,22±0,21
3. Первая категория	+0,13±0,20
4. Вторая категория	+0,07±0,21

Примечание: * корреляция достоверная при $P \geq 0,95$.

По данным таблицы 6 следует, что корреляционная связь между высотой воздушной камеры и КМАФАнМ у диетических яиц получилась по-

ложительной и для высшей категории достоверна ($P \geq 0,95$). Для отборной, первой и второй категорий диетических яиц выявленная связь слабая и статистически недостоверна.

Такие же результаты получились по столовому яйцу. У высшей категории яиц выявлена достоверная связь при $P \geq 0,95$, у отборной, первой и второй категорий – корреляция слабая и статистически недостоверная.

Корреляции между высотой воздушной камеры и показателем общей бактериальной обсемененности разных категорий пищевых яиц оказались слабо положительными, так как КМАФАнМ зависит не только от продолжительности хранения яиц, но и от снижения бактерицидной активности скорлупы и подскорлупных оболочек, а также снижения активности лизоцима. При продолжительном хранении лизоцим постепенно инактивируется, яйцо высыхает, изменяется консистенция белка, желток становится подвижным, создаются условия для проникновения и размножения в яйце микроорганизмов. При снижении бактерицидной активности скорлупы и подскорлупных оболочек микроорганизмы, находящиеся на поверхности яйца, проникают через скорлупу и подскорлупные оболочки в содержимое яйца. Бактерии, проникнув через поры скорлупы, размножаются на наружной, подскорлупной оболочке в месте внедрения, образуя мелкие колонии. Под действием протеолитических ферментов бактерий подскорлупные оболочки растворяются, бактерии проникают в содержимое яйца и активно растут и размножаются в желтке яйца.

Чтобы оценить долю влияния учтенного фактора (высоты воздушной камеры яиц) на показатель общей бактериальной обсемененности (КМАФАнМ), мы провели однофакторный дисперсионный анализ и получили следующие результаты. У диетических яиц доля влияния учтенного фактора – высоты воздушной камеры (пуги) – составила всего 35,35 %, а доля влияния неучтенных факторов (которыми могут быть микроповреждения скорлупы и подскорлупных оболочек, содержание лизоцима и т.д.) – 64,65 %. По столовому яйцу: доля влияния учтенного фактора оказалась равной 20,34 %, а доля влияния неучтенных факторов – 79,66 %.

По результатам ветеринарно-санитарной экспертизы пищевые куриные яйца ООО «Север» отвечают всем требованиям безопасности и качества, предъявляемым к пищевой продукции Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности пищевой продукции» ТР ТС 021/2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Технический регламент Таможенного союза «О безопасности пищевой продукции» (ТР ТС 021/2011) [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.gost.ru. Дата обращения: 01.02.2016 г.
2. ГОСТ 31654-2012. Яйца куриные пищевые. Технические условия. Введ. 2014 – 01–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.

3. ГОСТ 31747-2012. Продукты пищевые. Методы выявления и определения количества бактерий группы кишечных палочек (колиформных бактерий). Введ. 2013 – 07 – 01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
4. ГОСТ 10444.15-94. Продукты пищевые. Методы определения количества мезофильных аэробных и факультативно-анаэробных микроорганизмов. Введ. 1996 – 01 – 01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
5. ГОСТ 30178-96. Сырье и продукты пищевые. Атомно-абсорбционный метод определения токсичных элементов. Введ. 1998–01–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
6. ГОСТ Р 51766-2001. Сырье и продукты пищевые. Атомно-абсорбционный метод определения мышьяка. Введ. 2002–06–30. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
7. ГОСТ 26927-86. Сырье и продукты пищевые. Метод определения ртути. Введ. 1986–12–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
8. *Клисенко М.А.* Методы определения микроколичеств пестицидов в продуктах питания, кормах и внешней среде. В 2 т. Т. 1: справочник / М.А. Клисенко [и др.]; под ред. М.А. Клисенко. М.: Колос, 1992. 567 с.
9. *Клисенко М.А.* Методы определения микроколичеств пестицидов в продуктах питания, кормах и внешней среде. В 2 т. Т. 2: справочник / М.А. Клисенко [и др.]; под ред. М.А. Клисенко. М.: Колос, 1992. 416 с.

УДК 637.5

И. О. Фролова, А. С. Ермишин*

Костромская государственная сельскохозяйственная академия
Россия, г. Кострома, *e-mail: chiot-fac@mail.ru*,

*Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: ermishinas@ystu.ru*

**КАЧЕСТВО МЯСА КРОЛИКОВ
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЕГО МОРФОЛОГИЧЕСКОГО
И ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА ПОД ВЛИЯНИЕМ
НЕКОТОРЫХ ИНВАЗИОННЫХ БОЛЕЗНЕЙ**

Представлены результаты исследований морфологического и химического состава мяса кроликов при кокцидиозе и фасциолёзе в сравнении со здоровыми животными.

Ключевые слова: *клинический осмотр, ветеринарно-санитарная экспертиза, мясо кроликов, инвазионные болезни, безопасность продукции, химический состав, морфологический состав.*

I. O. Frolova, A. S. Ermishin*

*Kostroma State Agricultural Academy
Russia, Kostroma, e-mail: chiot-fac@mail.ru,
*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru*

THE QUALITY OF THE MEAT OF RABBITS, WHEN CHANGING THE MORPHOLOGICAL AND CHEMICAL COMPOSITION UNDER THE INFLUENCE OF SOME PARASITIC DISEASES

The results of studies of morphological and chemical composition of rabbit meat with coccidiosis and fascioliasis in comparison with healthy animals are presented.

Keywords: *clinical inspection, veterinary-sanitary expertise, meat of rabbits, invasive disease, product safety, chemical composition, morphological composition.*

В настоящее время кролиководство в России, в том числе и Ярославской области, находится в состоянии упадка, и те немногие кролиководческие хозяйства, которые ещё занимаются разведением этих высокоценных зверьков, страдают не только от экономических факторов, но и биологических. Инвазионными болезнями поражается большая часть поголовья кроликов ежегодно, поэтому очень важно проводить грамотную ветеринарно-санитарную оценку качества и безопасности мяса таких животных.

Научная новизна работы состоит в том, что выявлены статистически достоверные различия физико-химических показателей мяса кроликов, больных паразитарными заболеваниями и здоровых, что служит основанием для дальнейшего изучения проблемы и последующей корректировки санитарно-гигиенических требований к мясу инвазированных животных.

Исследования проводились на базе ГБУ ЯО «Ярославская областная станция по борьбе с болезнями животных» и частной ветеринарной лаборатории.

Материалом служили кролики из частного хозяйства – ООО «Клен» Тутаевского района Ярославской области, в общем количестве 9 голов, из расчёта 3 головы из каждой партии согласно ГОСТ 20235.0-74 [1], с разделением на три группы: I группа – контрольная (клинически здоровые кролики); II группа – опытная (кролики, больные фасциолёзом); III группа – опытная (кролики, больные кокцидиозом).

Предубойный осмотр кроликов включал термометрию, осмотр видимых слизистых оболочек, состояние шерстного покрова, определение упитанности, наличие или отсутствие выделений из естественных отверстий. Результаты клинического осмотра приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты клинического осмотра кроликов

№ кролика	Температура, С°	Видимые слизистые оболочки	Состояние шерстного покрова	Упитанность
1	2	3	4	5
I (контрольная) группа				
№ 179	38,8	Розовые, блестящие, без наложений	Гладкий, ровный, блестящий, чистый. Признаки поражения отсутствуют	Мускулатура на ощупь развита хорошо, остистые отростки спинных позвонков прощупываются слабо и не выступают, зад и бедра округлены, легко прощупываются подкожные жировые отложения
№ 251	38,5	Бледно-розовые, блестящие, без наложений		
№ 274	38,9	Розовые, блестящие, без наложений		
M±m	38,7±0,11* ¹⁻²	х	х	х
II (опытная) группа				
№ 143	39,8	Бледные	Взъерошен, сухой и ломкий волос	Мускулатура развита слабо, остистые отростки спинных позвонков легко прощупываются. Жировые отложения не прощупываются
№ 247	39,9	Бледные	Сухой и ломкий волос	
№ 324	41,3	Бледные	Взъерошен, волос сухой	
M±m	40,3±0,42* ²⁻³	х	х	х
III (опытная) группа				
№ 350	38,9	Бледные	Взъерошенный, тусклый, сальный	Мускулатура развита удовлетворительно, остистые отростки спинных позвонков легко прощупываются, жировые отложения отсутствуют
№ 293	39,4	Бледные	Взъерошенный, тусклый, сальный	
№ 195	39,3	Бледные	Взъерошенный, тусклый, сальный	
M±m	39,2±0,13* ¹⁻³	х	х	х

Примечание: *разность достоверна при $P \geq 0,95$ по t-критерию при сравнении указанных групп.

По данным таблицы мы видим, что у кроликов больных кокцидиозом и фасциолёзом общая температура тела выше, чем у группы здоровых кроликов. Видимые слизистые оболочки у обеих групп больных кроликов бледные, мускулатура развита слабо, жировые отложения преимущественно отсутствуют. У кроликов больных фасциолёзом шерстный покров преимущественно сухой и ломкий, а у больных кокцидиозом шерстный покров взъерошенный и сальный.

После клинического осмотра были проведены копрологические исследования. По результатам копрологических исследований в фекалиях кроликов больных фасциолёзом были обнаружены яйца фасциол, а у кроликов больных кокцидиозом в фекалиях обнаружили ооцисты кокцидий. Заметим, хотя мы и не ставили задачи выяснить причину инвазий, что источником заражения могла послужить свежая трава, инвазированная личинками паразитов и используемая в кормлении животных.

Затем была проведена послеубойная ветеринарно-санитарная экспертиза, включавшая осмотр внутренних органов и тушек кроликов. Результаты ветеринарно-санитарного осмотра тушек кроликов из контрольной группы показали, что состояние внутренних органов и тканей было характерным для здоровых животных. Патоморфологических изменений в органах и тушках кроликов не наблюдалось.

Ветеринарно-санитарный осмотр тушек кроликов из группы больных фасциолёзом свидетельствует, что показатели состояния внутренних органов и тканей характерны для фасциолёза. Присутствие фасциол в желчных протоках печени (рис. 1) это подтверждает.



Рис. 1. Фотография печени кролика с фасциолами в желчных протоках



Рис. 2. Фотография печени кролика с кокцидиозными узелками на поверхности

Ветеринарно-санитарная оценка мяса при фасциолёзе: внутренние органы при слабой степени инвазии зачищают и выпускают в реализацию.

При поражении 2/3 органа его отправляют на утилизацию. Тушки выпускают без ограничений.

Ветеринарно-санитарный осмотр тушек кроликов из группы больных кокцидиозом показал, что состояние внутренних органов и тканей характерно для кроликов больных кокцидиозом печёночной формы (рис. 2).

Ветеринарно-санитарная оценка мяса при кокцидиозе: при отсутствии истощения и желтушной окраски тушку и внутренние органы выпускают без ограничений.

Для подтверждения того, что фасциолёз и кокцидиоз не влияет существенно на химические и морфологические показатели мяса кроликов были проведены биохимические и физико-химические исследования.

Органолептическое исследование показало, что мясо кроликов контрольной и двух опытных групп соответствует ГОСТ 7269-79 [2]. Признаков порчи мяса не отмечалось.

По данным табл. 2 результаты физико-химического исследования показали, что pH мяса, полученного от больных кроликов, незначительно понижается. При пробе варкой все 9 образцов имели прозрачный бульон. Реакция на пероксидазу с бензидином слабо изменялась, что указывает на снижение активности пероксидазы, а результаты исследований формольной реакции показали низкую чувствительность.

Таблица 2. Результаты физико-химического анализа мяса

Показатели	pH	Проба варкой	Реакция на пероксидазу с бензидином	Формольная проба
I (контрольная) группа				
M±m	5,85±0,08	Бульон прозрачный	Положительная	Вытяжка прозрачная
II (опытная) группа				
M±m	6,34±0,02	Бульон прозрачный	Слабо изменялась	Вытяжка прозрачная
III (опытная) группа				
M±m	6,93±0,19	Бульон прозрачный	Слабо изменялась	Вытяжка слабо мутнеет

Далее исследовали химический состав мяса: сухое вещество, минеральные вещества, содержание влаги, белка, жира. Как видно из табл. 3, содержание влаги в группах больных животных значительно выше, чем у контрольной группы. Так в мясе кроликов, больных фасциолёзом, содержание влаги выше на 4,13 %, а у группы больных кокцидиозом достоверно выше на 3,51 % ($P \geq 0,99$).

Таблица 3. Химический состав мяса кроликов

Состав	Группы животных		
	I (контрольная)	II (опытная)	III (опытная)
pH	5,85±0,08*** ¹⁻²	6,34±0,02* ²⁻³	6,93±0,19** ¹⁻³
Сухие вещества, %	24,54±0,11** ¹⁻²	21,8±0,63	20,75±0,56*** ¹⁻³
Минеральные вещества, %	19,59±0,07*** ¹⁻²	16,55±0,56	15,69±0,54*** ¹⁻³
Влага, %	74,02±0,73** ¹⁻²	78,15±0,64	77,53±0,49** ¹⁻³
Белок, %	15,91±0,98	17,19±0,03*** ²⁻³	18,45±0,09** ¹⁻³
Жир, %	5,22±0,60** ¹⁻²	2,91±0,06	2,90±0,15** ¹⁻³

Примечание: * разность достоверна при $P \geq 0,95$ по t-критерию при сравнении указанных групп; ** разность достоверна при $P \geq 0,99$ по t-критерию при сравнении указанных групп; *** разность достоверна при $P \geq 0,999$ по t-критерию при сравнении указанных групп.

Показатели содержания жира у групп больных фасциолёзом и кокцидиозом снижены на 2,31 % по сравнению с группой здоровых кроликов, что статистически достоверно ($P \geq 0,99$). Содержание сухого вещества так же достоверно снизилось в II (опытной) группе на 2,74 % ($P \geq 0,99$) и в III (опытной) группе на 3,7 % ($P \geq 0,999$), за счёт уменьшения минеральных компонентов. При определении pH мяса отмечалось незначительное, но статистически высоко достоверное повышение щёлочности у группы кроликов, больных фасциолёзом (на 0,49, при $P \geq 0,999$), а у группы больных кокцидиозом кислотность повысилась на 1,08 ($P \geq 0,99$).

Химическим составом обусловлен один из важнейших компонентов питательной ценности мяса кроликов – калорийность. Калорийность мяса кроликов контрольной группы составляла 469,88 кДж, калорийность группы кроликов, больных фасциолёзом была снижена до 417,39 кДж, а больных кокцидиозом – 403,41 кДж.

Несмотря на экспериментально установленные изменения, тушки кроликов заражённых данными заболеваниями, выпускают без ограничений согласно Правилам ветеринарного осмотра убойных животных и ветеринарно-санитарной экспертизы мяса и мясных продуктов [3].

Считаем, что можно рекомендовать соответствующим отраслевым ведомствам задуматься над изменением санитарно-гигиенических требований к мясу инвазированных кроликов, поскольку изменения в мясе кроликов больных паразитарными заболеваниями и здоровых животных статистически значимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 20235.0-74. Мясо кроликов. Методы отбора образцов. Органолептические методы определения свежести. Введ. 1985 – 06 – 30. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
2. ГОСТ 7269-79. Мясо. Методы отбора образцов и органолептические методы определения свежести. Введ. 1980 – 01 – 01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
3. Правила ветеринарного осмотра убойных животных и ветеринарно-санитарной экспертизы мяса и мясных продуктов (утв. Минсельхозом СССР 27.12.1983). [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.consultant.ru/>. Дата обращения: 01.10.2016 г.

УДК 637.4/.5.004.12

А. П. Шитова, А. С. Ермишин*

Ярославская государственная сельскохозяйственная академия
Россия, г. Ярославль, *e-mail: alyonashitova@mail.ru*,
*Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: ermishinas@ystu.ru*

**ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА И БЕЗОПАСНОСТИ
ОХЛАЖДЁННОЙ ПРОДУКЦИИ
АО «ЯРОСЛАВСКИЙ БРОЙЛЕР»**

Рассматриваются результаты применения глубокого комплексного научного анализа показателей качества и безопасности охлажденной продукции АО «Ярославский бройлер».

Ключевые слова: риски, ХАССП, корреляционный и охлаждённой продукции птицефабрики «Ярославский бройлер», анализ, дисперсионный анализ, показатели качества и безопасности продукции, охлаждённая продукция.

A. P. Shitova, A. S. Ermishin*

*Yaroslavl State Agricultural Academy
Russia, Yaroslavl, e-mail: alyonashitova@mail.ru,
*Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru*

**STUDY OF THE SAFETY AND QUALITY
OF CHILLED PRODUCTS IN THE ENTERPRISE
«YAROSLAVSKY BROILER»**

Discusses the results of the application of deep and comprehensive scientific analysis of indicators of the quality and safety of chilled products at poultry factory «Yaroslavsky broiler».

Keywords: risks, HACCP, correlation analysis, analysis of variance, quality indicators and security products, chilled products.

Одной из крупнейших птицефабрик в Ярославской области, имеющей рынки сбыта не только в данном регионе, но и в Тверской, Костромской, Московской, Владимирской, Ивановской, Архангельской областях и Санкт-Петербурге, является АО «Ярославский бройлер» Рыбинского района с поголовьем птиц на выращивании 2289 тыс. голов кросса РОСС-308. Именно высокое качество производимой продукции и жёсткий контроль всех производственных процессов в цепочке – от производства собственных кормов до конечного потребителя – позволили увеличить конкурентоспособность продукции предприятия и её популярность.

Наши исследования проводились по заявке предприятия АО «Ярославский бройлер». Научная новизна работы состоит в том, что впервые применён комплекс методов биометрической обработки количественных показателей результатов ветеринарно-санитарной экспертизы пищевых продуктов, включающий статистический анализ варьирующих величин, корреляционный и однофакторный дисперсионный анализ с оценкой достоверности эмпирических показателей.

Практическая значимость работы в том, что доказана важность соблюдения предельно-допустимых значений по бактериальной обсеменённости, температуре в толще мышц после охлаждения для пищевых продуктов, в частности мяса и мясопродуктов птицы; разработаны практические предложения по оптимизации технологического и санитарно-гигиенического режима первичной обработки мяса и мясных продуктов и устранению или минимизации опасных рисков на АО «Ярославский бройлер» Ярославской области.

На данном предприятии работу по производственному ветеринарно-санитарному контролю осуществляет производственная контрольная лаборатория, данные исследований заносятся в специальный журнал.

С 2011 года на АО «Ярославский бройлер» введена в действие система ХАССП, поэтому контроль качества и безопасности продукции проводят на основании разработанных критических контрольных точек в соответствующих цехах.

Органолептические показатели, такие как внешний вид, упитанность, цвет мышц, кожи и подкожной клетчатки, степень снятия оперения, состояние кожи и костей определяли визуально, а также исследовали образцы по запаху на признаки порчи.

По органолептическим показателям филе грудки и мясо цыплят-бройлеров 1 и 2 сорта соответствовало требованиям действующего государственного стандарта на мясо кур (тушки кур, цыплят-бройлеров и их части), а также техническим условиям на натуральные полуфабрикаты из мяса цыплят-бройлеров, и их следует считать свежими.

После охлаждения мяса цыплят-бройлеров измерили температуру в толще мышц. Показатели находились в допустимых нормативной документацией пределах (табл. 1).

Таблица 1. Температура в толще мышц (°С) после охлаждения мяса цыплят-бройлеров (n=15) по ГОСТ 31962-2013 [1]

№ группы	Показатели	Фактические данные	Значения показателей по нормативной документации для охлаждённой продукции	lim (min – max)	C _v , %	Разность показателей между группами
		M±m				
1 гр.	Тушки цыплёнка-бройлера 1 сорта	2,0±0,47	0...+4	1–3	40,80	0,2 ¹⁻²
2 гр.	Тушки цыплёнка-бройлера 2 сорта	2,2±0,56		1–3	43,91	1,4 ²⁻³
3 гр.	Филе грудки цыплёнка-бройлера	3,6±0,63		3–4	30,42	1,6* ¹⁻³

Примечание: * разность достоверна при P≥0,95 по t-критерию при сравнении указанных групп.

По бактериологическим показателям (табл. 2) охлаждённые мясные продукты также удовлетворяли требованиям нормативной документации. Однако наибольшую бактериальную обсеменённость по показателю количества мезофильных аэробных и факультативно-анаэробных микроорганизмов (КМАФАнМ) имели образцы филе грудки цыплят-бройлеров – в среднем, 7 тыс. КОЕ/см³ при предельно допустимом уровне 10 тыс. КОЕ/см³. Разница по показателю КМАФАнМ между образцами филе грудки и тушек цыплят-бройлеров 1 и 2 сорта оказалась высоко достоверной статистически (P≥0,999).

Антибиотики тетрациклиновой группы, а также бацитрацин и левомицетин в исследуемых образцах обнаружены не были.

Патогенные микроорганизмы, в том числе бактерии группы сальмонеллы, листерии, а также санитарно-показательные микроорганизмы – бактерии группы кишечной палочки (БГКП) – в исследуемых образцах обнаружены не были. А это означает, что в санитарно-гигиеническом отношении мясо и филе грудки цыплят-бройлеров можно считать безопасным.

Таблица 2. Бактериологические показатели мяса цыплят-бройлеров (n=15)

№ п/п	Показатели	Фактические данные		Значения показателей по нормативной документации для охлажденной продукции	Нормативная документация на методы испытаний	lim (min – max)	С _{ср} %	Разность показателей между группами
		М-тн						
1.	КМАФАнМ, КОЕ/см ² :							
1 гр.	тушки цыпленка-бройлера 1 сорта	370±39,66				280–490	21,44	80 ¹⁻²
2 гр.	тушки цыпленка-бройлера 2 сорта	450±38,00		Не более 10000	ГОСТ 10444.15-94 [2]	360–550	16,89	6550***2-3
3 гр.	филе грудки цыпленка-бройлера	7000±429,26				5580–7890	12,26	6630***1-3
2.	БГ КП (колиформы)							
1 гр.	тушки цыпленка-бройлера 1 сорта					–	–	–
2 гр.	тушки цыпленка-бройлера 2 сорта		Не обнаружены в 25 г	Не допускается в 25 г	ГОСТ 31747-2012 [3]	–	–	–
3 гр.	филе грудки цыпленка-бройлера					–	–	–
3.	Патогенные микроорганизмы, в т.ч. сальмонеллы, L. typhimurium:							
1 гр.	тушки цыпленка-бройлера 1 сорта					–	–	–
2 гр.	тушки цыпленка-бройлера 2 сорта		Не обнаружены в 25 г	Не допускается в 25 г	ГОСТ 31468-2012 [4] ГОСТ 32031-2012 [5]	–	–	–
3 гр.	филе грудки цыпленка-бройлера					–	–	–

Примечание: *** – разность достоверна при P≥0,999 по t-критерию при сравнении указанных групп.

Для микробиологического контроля качества проводимой дезинфекции на предприятии берут смывы с оборудования, инвентаря, тары, специальной одежды и рук персонала. Контроль санитарного состояния птицеперерабатывающего предприятия проводится регулярно:

– производственный контроль по нормативной документации обязан проводиться через каждые 2 недели, но на предприятии он проводится ежедневно с анализом наличия бактерий группы сальмонелл;

– государственный надзор и инспекционный контроль 2 раза в квартал, взятие смывов осуществляют выборочно, с чередованием единиц оборудования, согласно действующей нормативной документации [6].

В качестве дезинфицирующего средства на предприятии АО «Ярославский бройлер» применяют «Криодез». Время экспозиции данного средства на предприятии 8 минут.

В цехе убоя и первичной переработки птицы были взяты смывы со следующих объектов: в зале обработки птицы с машины «Киллер», ванн для оглушения, крови, с пероципов и подвесок, с машин вырезания клоаки, извлечения внутренних органов, отделения кишечника и желчного пузыря, отделения шеи, проверки трахеи, очистки желудков и зачистки тушек, подвесок; в зале упаковки цыплят-бройлеров с транспортёров, подвесок, столов и ванн для сортировки и охлаждения, ящиков; со столов-досок линии крыла, бедра, голени, филе, машин для снятия кожи, выбивания костей, филетировочных машин «Meun» и «Stork», транспортёров, прессов, производственных столов, фаршемешалки, ящиков, тележек для сырья.

По результатам испытаний, были обнаружены БГКП, а патогенные микроорганизмы рода сальмонелла отсутствовали. Но после проведения повторной дезинфекции БГКП обнаружено также не было.

Из физико-химических показателей (табл. 3) определяли массовую долю белка и жира в образцах. Наибольшее количество белка содержалось в тушках бройлеров 1 сорта и филе грудки. Однако разница по этому показателю в исследуемых продуктах была незначительной. В среднем, массовая доля белка составила 23–24 % у всех образцов.

Наименьшее содержание жира было выявлено в образцах филе грудки – 2,4 %, наибольшее – в тушках цыплят-бройлеров 2 сорта – 8,1 %. Это объясняется тем, что тушки цыплят имели кожный покров и подкожную клетчатку, тогда как филе грудки было очищено от кожи и подкожного жирового слоя. Разность показателей между образцами статистически оказалась высоко достоверна ($P \geq 0,95-0,999$).

Таблица 3. Физико-химические показатели мяса цыплят-бройлеров (n=15)

№ п/п	Показатели	Фактические данные		Значения показателей по нормативной документации для охлажденной продукции	Нормативная документация на методы испытаний	lim (min – max)	C ₉₅ , %	Разность показателей между группами
		М _{ср}	М _{ст}					
1.	Содержание белка, %:							
	1 гр. тушки цыпленка-бройлера 1 сорта	24,01±1,03		Не менее 16%	ГОСТ 25011-81 [7]	21,0–26,5	8,58	1,141-2
	2 гр. тушки цыпленка-бройлера 2 сорта	22,87±1,03						
3 гр. филе грудки цыпленка-бройлера	23,63±1,08		Не менее 15%		19,5–24,9	9,14	0,381-3	
2.	Содержание жира, %:							
	1 гр. тушки цыпленка-бройлера 1 сорта	5,18±0,17		Не более 14%	ГОСТ 23042-86 [8]	4,2–6,4	6,56	2,97*1-2
	2 гр. тушки цыпленка-бройлера 2 сорта	8,15±0,21						
3 гр. филе грудки цыпленка-бройлера	2,40±0,19		Не более 8%		4,9–9,4	5,15	5,75***1-3	
3.	Хлорогенические пестициды (гексахлоргексан (α, β, γ-изомеры) и ДДТ и его метаболиты), мг/кг.							
	1 гр. тушки цыпленка-бройлера 1 сорта			Не более 0,1	Методы определения микроколичеств пестицидов в продуктах питания, кормах и внешней среде / под ред. М.А. Кадисенко, Т. 1, 2, 1992 [9, 10]	-	-	-
	2 гр. тушки цыпленка-бройлера 2 сорта							
3 гр. филе грудки цыпленка-бройлера								

Примечание: * разность достоверна при $P \geq 0,95$ по t-критерию при сравнении указанных групп; *** разность достоверна при $P \geq 0,999$ по t-критерию при сравнении указанных групп.

По указанным показателям (температура в толще мышц мясной продукции, КМАФАнМ, содержание белка и жира в продуктах) для проверки значимости полученных значений был использован, как более точный, метод оценки достоверности различий между дисперсиями, то есть по показаниям вариабельности изучаемых признаков. Его результаты практически полностью совпали с ранее полученными данными: только по содержанию жира в образцах разность была достоверна лишь между показателями тушек цыплят-бройлеров 2 сорта и филе грудки ($P \geq 0,95$).

В ходе химико-токсикологического анализа в пищевой продукции были обнаружены лишь следы хлорорганических соединений – в количествах, значительно меньших, чем предел чувствительности метода их обнаружения – менее 0,04 мг/кг.

После проведения всех испытаний по определению качества потрошения тушек и их охлаждения, были проведены расчёты корреляции температуры в толще мышц после охлаждения мяса и КМАФАнМ образцов, а также массовой доли белка и жира с КМАФАнМ в продуктах ранговым методом и прямым способом. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4. Корреляции показателей образцов охлаждённого мяса (n=15)

Показатели	Корреляция, рассчитанная:	
	прямым способом	ранговым методом
1. Температура – КМАФАнМ	+0,777***	+0,649***
2. Содержание белка – КМАФАнМ	+0,131	+0,032
3. Содержание жира – КМАФАнМ	-0,769***	-0,586**

Примечание: ** корреляция достоверна при $P \geq 0,99$;

*** корреляция достоверна при $P \geq 0,999$.

Взаимосвязь температуры в толще мышц и КМАФАнМ оказалась сильной положительной и статистически высоко достоверной ($P \geq 0,999$), что подтверждает биологическую закономерность: чем выше температура продукта (кроме термической обработки, например, варки или жарки), тем больше вероятность развития в нём микроорганизмов.

Графически зависимость общей бактериальной обсеменённости от температуры в толще мышц после охлаждения, а также линия и уравнение линии тренда приведены на рис. 1.

Корреляция содержания белка в образцах и КМАФАнМ оказалась слабой положительной и не достоверной. Положительная корреляция, хотя и слабая, объясняется тем, что белок – это хороший субстрат для развития микроорганизмов, а также в свежем продукте.

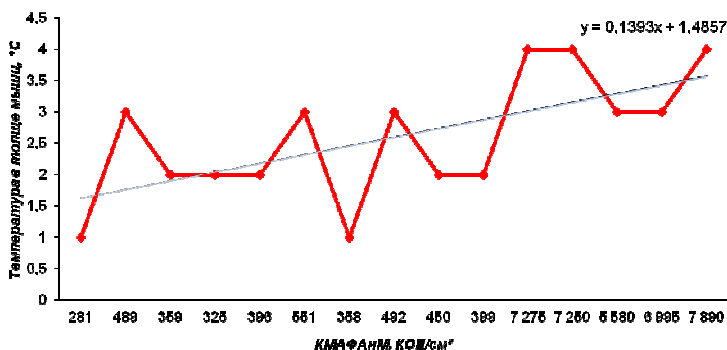


Рис. 1. Зависимость показателя КМАФАнМ от температуры в толще мышц после охлаждения образцов

Графически зависимость общей бактериальной обсеменённости от содержания белка в образцах мяса и мясных продуктов, а также линия и уравнение линии тренда приведены на рис. 2.

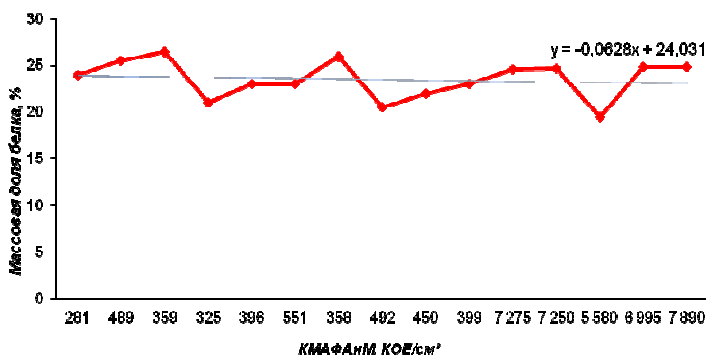


Рис. 2. Зависимость показателя КМАФАнМ от содержания белка в образцах

Корреляционная связь массовой доли жира в образцах и КМАФАнМ оказалась, напротив, средняя отрицательной и статистически высоко достоверной ($P \geq 0,99 - 0,999$). Это можно объяснить, предположив, что чем больше содержание жира в продукте, тем меньше в нём содержание влаги, так как эта зависимость является закономерной, а, соответственно, чем меньше влаги, тем складываются менее

благоприятные условия для развития микрофлоры в продукте. Однако стоит помнить, что такая зависимость может сохраняться только пока продукт свежий. Затем, по мере его хранения, жиры в мясе начинают распадаться на жирные кислоты, и снижается рН продукта, что, в свою очередь, вызывает быстрое развитие микрофлоры.

Графически зависимость общей бактериальной обсеменённости от содержания жира в образцах мяса и мясных продуктов, а также линия и уравнение линии тренда приведены на рис. 3.

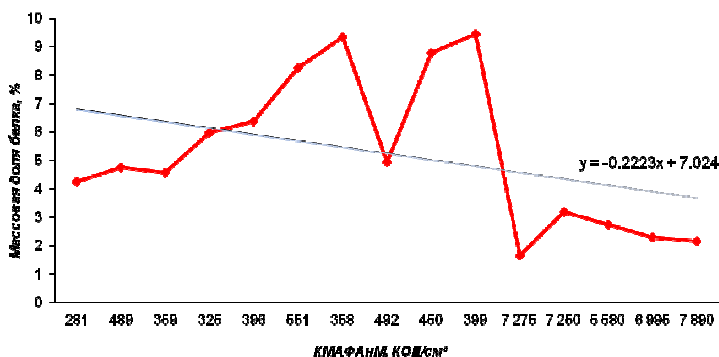


Рис. 3. Зависимость показателя КМАФАнМ от содержания жира в образцах

Выявленная разность в коэффициентах корреляций свидетельствует лишь о различии самой конструкции методов, а не о технических или случайных ошибках опыта.

Был также проведён однофакторный дисперсионный анализ влияния температуры в толще мышц после охлаждения мясных продуктов, а также содержания белка и жира в продуктах на показатель их общей бактериальной обсеменённости. Доля влияния данных факторов составила, соответственно 72,02 % (результаты оказались достоверны при $P \geq 0,99$); 63,83 % ($P \geq 0,95$) и 81,60 % ($P \geq 0,99$), что подтвердило ранее полученные результаты.

Также на общую бактериальную обсеменённость продукции влияние оказали и неучтённые факторы, например, ошипка и потрошение тушек, отделение филе от тушки, как машинным способом, так и ручным. Данные факторы указывает на попадание микрофлоры с пера и кожи птицы, рабочих поверхностей оборудования и рук работников.

По результатам проведённой ветеринарно-санитарной экспертизы можно сказать, что мясо цыплят-бройлеров производства АО

«Ярославский бройлер» соответствует требованиям Технического регламента Таможенного союза «О безопасности пищевой продукции» ТР ТС 021/2011 [11].

Также нами были сформулировано следующее предложение производству:

Целесообразно усилить контроль температурного режима охлаждения продукции в целях предотвращения развития в ней микроорганизмов и снижения рисков порчи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 31962-2013. Мясо кур (тушки кур, цыплят, цыплят-бройлеров и их части). Технические условия. Введ. 2014–07–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
2. ГОСТ 10444.15-94. Продукты пищевые. Методы определения количества мезофильных аэробных и факультативно-анаэробных микроорганизмов. Введ. 1996–01–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
3. ГОСТ 31747-2012. Продукты пищевые. Методы выявления и определения количества бактерий группы кишечных палочек (колиформных бактерий). Введ. 2013–07–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
4. ГОСТ 31468-2012. Мясо птицы, субпродукты и полуфабрикаты из мяса птицы. Метод выявления сальмонелл. Введ. 2013 – 07 – 01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
5. ГОСТ 32031-2012. Продукты пищевые. Методы выявления бактерий *Listeria monocytogenes*. Введ. 2014–07–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
6. Инструкция по порядку и периодичности контроля за содержанием микробиологических и химических загрязнителей в мясе, птице, яйцах и продуктах их переработки № 1400/1751. Утв. 2000–06–27. М.: ДеЛи, 2000, 80 с.
7. ГОСТ 25011-81. Мясо и мясные продукты. Методы определения белка. Введ. 1983–01–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
8. ГОСТ 23042-86. Мясо и мясные продукты. Методы определения жира. Введ. 1998–01–01. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://docs.cntd.ru>. Дата обращения: 01.10.2016 г.
9. Клисенко М.А. Методы определения микроколичеств пестицидов в продуктах питания, кормах и внешней среде. В 2 т. Т. 1: справочник / М.А. Клисенко [и др.]; под ред. М.А. Клисенко. М.: Колос, 1992. 567 с.
10. Клисенко М.А. Методы определения микроколичеств пестицидов в продуктах питания, кормах и внешней среде. В 2 т. Т. 2: справочник / М.А. Клисенко [и др.]; под ред. М.А. Клисенко. М.: Колос, 1992. 416 с.
11. Технический регламент Таможенного союза «О безопасности пищевой продукции» (ТР ТС 021/2011) [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.gost.ru. Дата обращения: 01.02.2016 г.

Содержание

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

1. Абрамов В.В. Малое периодическое решение системы с параметром.....	3
2. Башкин М.А. Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $CP_{6,4,2,2}^{14}$	13
3. Бородин А.В. О новых полугрупповых свойствах ортогональных полиномов.....	20
4. Гой Т.П. Определители матриц Теплица-Хессенберга и числа Люка.....	32
5. Зверкина Г.А. О склеивании стационарной и нестационарной версий перескока процесса восстановления.....	37
6. Мамонов С.С., Харламова А.О. Периодические решения системы с цилиндрическим фазовым пространством.....	45
7. Медведева Л.Б. О многообразии бисекант нормальной кривой.....	52
8. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях периодической траектории, проходящей через точку стыка линий разрыва векторного поля.....	57
9. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях периодических траекторий линейных неоднородных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.....	66
10. Султанов С.Р. О дискретных группах с некоторыми ограничениями на пространство подгрупп.....	72
11. Седьмов Н.А., Залуцкий А.А. Мессбауэровская спектроскопия магнитной фракции из глубоководных океанических отложений	78

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

12. Башкин М.А., Силин В.С. Курс «Дискретной математики» на основе балльно-рейтинговой системы.....	85
13. Бергер Г.А., Дорф Т.В. Метод «case-study» при обучении математике.....	91
14. Бессарабов Н.И., Зяблин В.Н. Математическое образование в ЮРГПУ (НПИ): опыт работы кафедры.....	94
15. Гулевич Н.М., Кузнецов В.О. О пределе одного интеграла.....	99
16. Кузнецов В.О., Гулевич Н.М. О составлении экзаменационных и олимпиадных задач.....	107
17. Ермишин А.С. Применение статистических методов в управлении качеством и безопасностью пищевой продукции при подготовке бакалавров.....	112
18. Жаров А.Н. Об изложении темы: алгоритм шифрования RSA.....	120
19. Иванова О.К., Яновская Е.А., Виноградова Ю.А. Влияние студенческих математических олимпиад на формирование информационно-коммуникационной образовательной среды.....	126
20. Капранова А.Б., Таршис М.Ю. Об основных методах приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	130

21. Карташова О.В. Информационный ресурс MIT Sloan Management Review на занятиях по дисциплине «Информационная система и управление организацией» для направления «Бизнес-информатика».....	139
24. Леонтьев В.К., Гирба Е.А., Кораблева О.Н. О дифференциальных уравнениях движения идеальной жидкости (уравнениях Эйлера).....	144
25. Медведева Л.Б., Иванова Н.И. Методы решения функциональных уравнений	147
26. Сальникова М.Г. Некоторые аспекты организации самостоятельной работы студентов при обучении математике.....	157
27. Ушенин М.В., Жарова И.Г. Использование символики и законов математической логики в курсе математического анализа.....	160

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

28. Балунов А.И., Куделин П.В. Энтропийный метод моделирования фазовых переходов в системах разделения непрерывных смесей.....	166
29. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А., Кокин С.Е. О методике привлечения эффекта Доплера для объяснения разницы в лагранжевом и эйлеровом подходах к описанию движения жидкости.....	179
30. Вилков Г.Г. Проектирование и управление разделительными химико-технологическими системами.....	183
31. Гальцева Ю.Д., Лискина Е.Ю. Построение регрессионной модели инвестиций	192
32. Зудин В.Л., Маланов А.Г. К выбору проектора для получения качественного изображения в полузатемненных учебных помещениях.....	197
33. Иванов П.А. Методы корреляционного распознавания изображений на базе когерентных оптоэлектронных процессоров.....	203
34. Клочкова И.Ю. Математическая модель движения парашютиста в плоскости и в трехмерном пространстве.....	209
35. Королев Л.В., Быгев Д.О. Собственное время в модели случайного процесса.....	215
36. Коромыслов В.А. Критические условия реализации неустойчивости струи в ортогональном однородном электростатическом поле.....	218
37. Лискина Е.Ю., Серова О.П. Эконометрический анализ зависимости предпринимательской активности населения России от объема инвестиций в основной капитал малых предприятий.....	224
38. Рощина Т.К. Использование математической модели для управления концентрацией вещества в грязевом месторождении.....	230
39. Салахутдинова З.Г., Салахутдинова Е.С. Военно-логическая задача о распределении тяжелых огнетных систем для нанесения максимального урона противнику.....	233
40. Скuryгин Е.Ф. Об упаковке потока со случайными массами в контейнеры..	240
41. Таршис М.Ю., Королев Л.В., Капанова А.Б. Моделирование процессов смешивания сыпучих материалов в устройствах циркуляционного типа.....	242
42. Ширяев А.А. Устойчивость осцилляций поверхности заряженной капли в электростатическом поле стержня	250

43. **Ширяева С.О., Григорьев А.И., Завьялов Д.А.** Капиллярно-гравитационные волны в трёхслойной жидкости с двумя поверхностями раздела.. 259
44. **Ширяева С.О., Григорьев А.И., Орлова К.И.** О кольцевых волнах на поверхности проводящей жидкости во внешнем однородном электростатическом поле и электрическом пробое..... 262
45. **Юровская М.А., Леонтьев В.К., Смирнов Д.Е.** Движение частиц в пылеуловителе-классификаторе..... 265
46. **Яковлева Л.С.** Гравитационные волны в трехслойной жидкости с начальными условиями..... 270

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

47. **Новикова А.Н., Соловьев М.Е.** Квантово-химическая оценка антиоксидантной активности ингибиторов фенольного типа..... 279
48. **Рыбина Г.В., Мешечкина А.Е., Тараненко Г.Ю., Решихина А.В., Сорокина К.А.** Выбор аппаратурного оформления синтеза 1,2-эпоксидциклопентана..... 286
49. **Якименко Ю.Ю., Крюкова Ю.А., Кораблева О.Н.** Метод оптимизации при расчете процесса выпаривания..... 295

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

50. **Гусарова Н.И., Гусаров А.В., Олейникова Е.В.** Реализация компетентностного подхода при преподавании дисциплин естественнонаучного цикла в техническом вузе..... 300
51. **Марьясин О.Ю., Колодкина А.С.** Пакеты компьютерного моделирования HVAC систем и энергопотребления зданий..... 306
52. **Швыров В.В., Шишлакова В.Н., Капустин Д.А.** Нейронные сети в задачах классификации документов и автоматизации документооборота кафедры..... 316

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

53. **Лукьянова Н.С., Маркелова Н.Л., Тимрот С.Д., Казин В.Н., Бухалова А.Ю.** Токсикологическое обоснование процесса переработки тяжелых нефтяных отходов..... 324
54. **Макаров В.М., Маркелова Н.Л., Калаева С.З.** Очистка водного слоя прудов-накопителей кислого гудрона..... 331
55. **Соколова Н.С., Ермишин А.С.** Качество молока-сырья от разных поставщиков при ветеринарно-санитарном контроле на предприятии..... 336
56. **Ступина Т.С., Ермишин А.С.** Качество и безопасность пищевых яиц в ООО «Север»..... 341
57. **Фролова И.О., Ермишин А.С.** Качество мяса кроликов при изменении его морфологического и химического состава под влиянием некоторых инвазионных болезней..... 351
58. **Шитова А.П., Ермишин А.С.** Исследование качества и безопасности охлажденной продукции АО «Ярославский бройлер»..... 357

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 11

Ответственный редактор Ю.К. Оленикова

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 22.11.16. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.
Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл. печ.л. 21,62. Уч.-издл. 21,58. Тираж 50. Заказ

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Издательский дом ЯГТУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14а

Для заметок

Для заметок